



**UNA TÉCNICA EFICIENTE PARA FORMAR IMÁGENES A  
PARTIR DE UN SOLO PIXEL, BASADA EN LA  
TRANSFORMADA DE HADAMARD**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**

**DOCTOR EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

**P R E S E N T A**

**M. en C. C. PEDRO DAVID FILIO AGUILAR**

**DIRECTORA**

**DRA. MARÍA DE LOURDES LÓPEZ GARCÍA**

**CODIRECTOR**

**DR. JUVENAL RUEDA PAZ**

**TUTOR**

**DR. SAMUEL OLMOS PEÑA**

**VALLE DE CHALCO SOLIDARIDAD, MÉXICO MARZO 2023.**

# Índice general

<b>Portada</b>	<b>I</b>
<b>Oficio de designación de Tesis</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Índice general</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>X</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XII</b>
<b>Resumen</b>	<b>XIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIV</b>
<b>Capítulo 1    Introducción</b>	<b>1</b>
1.1    Planteamiento del problema . . . . .	3
1.2    Objetivos . . . . .	4
1.2.1    Objetivo general . . . . .	4
1.2.2    Objetivos específicos . . . . .	4
1.3    Hipótesis . . . . .	5
1.3.1    Identificación de las variables . . . . .	5
1.4    Metodología . . . . .	5
1.5    Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>Capítulo 2    Teoría y métodos</b>	<b>8</b>
2.1    Imagen Digital . . . . .	8
2.1.1    Clasificación de imágenes digitales . . . . .	9

2.2	Espectro Electromagnético . . . . .	10
2.3	Dispositivo de Micro espejo Digital DMD . . . . .	12
2.4	Imagen Computacional . . . . .	13
2.4.1	Configuración de Detección Estructurada . . . . .	14
2.4.2	Configuración de Iluminación Estructurada . . . . .	15
2.4.3	Detección por Compresión CS . . . . .	15
2.5	Imagen de Un Solo Píxel . . . . .	17
2.5.1	Métodos de muestreo . . . . .	19
2.5.2	Métodos de restauración . . . . .	20
2.6	Patrones de base Hadamard . . . . .	20
2.7	Imagen de Un Solo Píxel basada en la Transformada de Hadamard . . . . .	22
2.8	Modelos de ruido en imágenes . . . . .	23
2.9	Métricas de evaluación en la restauración . . . . .	24
2.10	Análisis de algoritmos . . . . .	26
<b>Capítulo 3 Estado del Arte</b>		<b>29</b>
3.1	Técnicas novedosas . . . . .	30
3.2	Aplicaciones interesantes de SPI . . . . .	31
3.3	Métodos de muestreo . . . . .	32
3.4	Métodos de ordenamiento . . . . .	33
<b>Capítulo 4 Técnica de ordenamiento propuesta</b>		<b>36</b>
4.1	Vectores base generalizados . . . . .	36
4.2	Ordenamiento propuesto . . . . .	38
<b>Capítulo 5 Resultados y discusión</b>		<b>42</b>
5.1	Materiales y configuración . . . . .	42
5.2	Resultados simulados . . . . .	43
5.2.1	Restauración con diferentes tasas de muestreo . . . . .	44
5.2.2	Comparación de GCS+S, CC, Walsh-Paley y Sequency . . . . .	45
5.2.3	Rendimiento bajo la influencia del ruido . . . . .	47

5.2.4	Rendimiento bajo escasez de la imagen . . . . .	49
5.3	Resultados experimentales . . . . .	51
5.4	Análisis de complejidad algorítmica . . . . .	54
5.4.1	Análisis algorítmico de la técnica GCS+S . . . . .	54
5.4.2	Análisis algorítmico de la técnica Cake-Cutting . . . . .	55
<b>Capítulo 6</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>58</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	58
6.2	Trabajo a futuro . . . . .	59
	<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>68</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>Código fuente</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>Productos de investigación</b>	<b>76</b>

# Índice de figuras

2.1	Ejemplos de imágenes digitales. . . . .	9
2.2	Diagrama del Espectro Electromagnético. . . . .	11
2.3	Dispositivo de Micro espejo Digital DMD. . . . .	13
2.4	Configuración de Detección Estructurada. . . . .	15
2.5	Configuración de Iluminación Estructurada. . . . .	16
2.6	Esquema de la configuración experimental de SPI. . . . .	17
2.7	Restauración de un objeto con SPI. . . . .	18
2.8	Matrices de Hadamard de orden natural. . . . .	22
2.9	Ejemplos de modelos de ruido. . . . .	25
2.10	Partes de un Algoritmo. . . . .	27
3.1	Diferentes ordenamientos propuestos para las matrices de Hadamard. . . . .	35
4.1	Construcción del conjunto $V_s^{(k)}$ . . . . .	38
4.2	Ordenación de secuencias. . . . .	39
4.3	Indexación y recorrido en zigzag. . . . .	41
5.1	Vista aérea del Sistema de Un Solo Píxel. . . . .	44
5.2	Restauración utilizando diferentes tasas de muestreo. . . . .	46
5.3	Comparación de las técnicas GCS+S, CC, Walsh-Paley y Sequency. . . . .	48
5.4	Rendimiento bajo la influencia del ruido. . . . .	50
5.5	Rendimiento bajo escasez de la imagen. . . . .	52
5.6	Comparación de restauración de imágenes de $128 \times 128$ píxeles. . . . .	53
5.7	Tiempo de ejecución de las técnicas GCS+S y CC. . . . .	57
B.1	Presentación de un póster. . . . .	78
B.2	Reconocimiento al mejor póster. . . . .	79

B.3	Ponencia magistral. . . . .	80
B.4	Artículo JCR publicado. . . . .	81
B.5	Artículo de divulgación publicado. . . . .	82
B.6	Artículo JCR publicado. . . . .	83

# Índice de tablas

2.1	Órdenes de complejidad. . . . .	28
5.1	Comparación cuantitativa utilizando las métricas RMSE y SSIM. . .	54

# Resumen

En el campo de la visión artificial muchas áreas pueden beneficiarse de la reconstrucción de un objeto, sin manipularlo directamente o incluso en longitudes de onda no visibles al ojo humano, por ejemplo: la obtención de imágenes biomédicas o la visualización de gases peligrosos. En los últimos años se han presentado diferentes técnicas de reconstrucción. Sin embargo, a veces estas técnicas se ven limitadas ya que cada vez se necesita procesar mayor información a una menor velocidad o incluso en tiempo real. La imagen de un solo píxel (SPI) es una tecnología experimental que permite obtener imágenes de alta calidad. En esta tesis se propone una técnica eficiente SPI basada en la transformada de Hadamard denominada GCS+S.

Los resultados simulados para un conjunto de 150 imágenes tomadas al azar de la base de datos COCO, muestran que GCS+S tiene el mismo rendimiento que la técnica Cake Cutting (CC) que es uno de los mejores algoritmos y presenta una mejor calidad de restauración de imágenes para tasas de muestreo bajas de alrededor del 8% cuando se restauran imágenes de tamaño  $64 \times 64$  y  $128 \times 128$  píxeles. Los resultados experimentales demuestran que las técnicas CC y GCS+S obtienen imágenes más nítidas a partir de una frecuencia de muestreo del 10%, también se observa una mejora en los valores SSIM de la técnica GCS+S en comparación con la técnica CC. Además se demuestra que para una imagen de tamaño  $N \times N$ , la técnica GCS+S puede construir la matriz ordenada de Hadamard con una complejidad de  $O(N^2)$ , en contraste con la técnica CC cuya complejidad es de  $O(N^4)$  cuando  $N = 2^n$  y  $n$  es la dimensión de la matriz de Hadamard. Por lo que, se puede concluir que la técnica propuesta es eficiente en comparación con los métodos encontrados en el estado del arte.

# Abstract

In the field of machine vision, there are many areas that can benefit from the reconstruction of an object, without manipulating it directly or even at wavelengths not visible to the human eye, for example: biomedical imaging or the visualisation of dangerous gases. Over the last decade, different reconstruction techniques have been presented. However, sometimes these techniques are limited as more and more information needs to be processed at a slower speed and even in real time. Single Pixel Imaging (SPI) is an experimental technology that allows high quality images to be obtained. In this thesis, an efficient SPI technique based on the Hadamard transform called GCS+S is proposed.

Simulated results for a set of 150 images taken at random from the COCO database. They show that the GCS+S method has at least the same performance as the Cake Cutting (CC) method which is one of the best algorithms according to the state of the art, and presents a better image restoration quality for low sampling rates of about 8% when restoring images of size  $64 \times 64$  and  $128 \times 128$  pixels. Experimental results show that the CC and GCS+S techniques obtain sharper images from a sampling rate of 10%, and there is also an improvement in the SSIM values of the GCS+S technique compared to the CC technique. It is also shown that for an image of size  $N \times N$ , the GCS+S technique can construct the ordered Hadamard matrix at a complexity of  $O(N^2)$ , in contrast to the CC technique whose complexity is  $O(N^4)$  when  $N = 2^n$  and  $n$  is the dimension of the Hadamard matrix. Therefore, it can be concluded that the proposed technique is efficient compared to the methods found in the state of the art.

---

# Introducción

En el área de visión artificial también llamada visión por computadora, existen muchos campos de aplicación que pueden beneficiarse de la reconstrucción de un objeto, sin interactuar directamente con él e incluso en longitudes de onda no visibles para el ojo humano, por ejemplo: la digitalización de superficies complejas, la inspección industrial de piezas fabricadas, la reconstrucción de imágenes biomédicas, la visualización de gases peligrosos, entre otros. Las soluciones desarrolladas para obtener el modelo de un objeto se pueden clasificar en dos categorías: activa y pasiva (Salvi et al., 2010).

En el enfoque pasivo, primero la cámara toma imágenes de la imagen desde dos o más puntos de vista, después se encuentran correspondencias entre las imágenes para obtener el modelo del objeto estudiado. Un requisito previo es que las cámaras deben calibrarse antes para que se conozcan, su posición y ángulo (Salvi et al., 2002).

El método activo, según S. Zhang y Huang (2006) también es conocido como método de luz estructurada, utiliza solo una cámara y una fuente de luz (un proyector) que ilumina un patrón sobre el objeto. Existen diferentes métodos de luz estructurada, tanto en el patrón como en la fuente de luz utilizados, así como, si es visible o invisible para el ojo humano.

La reconstrucción de objetos con luz estructurada es considerada una de las técnicas más confiables para recuperar superficies de objetos. Mediante un proyector y cámara calibrados, se proyecta un patrón de luz sobre el objeto y la cámara lo captura, después se encuentran las correspondencias entre los patrones proyectados y recuperados que se utilizan para extraer la información de un objeto en su forma real en el espacio y con alta precisión (Salvi et al., 2010).

Dentro de esas técnicas se encuentra un paradigma emergente llamado Imagen de un Solo Píxel SPI (del inglés Single-Pixel Imaging) que consiste en una configuración experimental, que permite a una plataforma equipada solo con un detector de un solo píxel y un proyector, obtener imágenes de alta calidad (Rousset et al., 2016).

La técnica de un solo píxel es un esquema de imagen innovador, se puede aplicar a imágenes en longitudes de onda no visibles, a imágenes en condiciones de poca luz y con una resolución precisa en profundidad (Gibson et al., 2020). La imagen de un solo píxel de Hadamard HSI (Hadamard Single-pixel Imaging, por sus siglas en inglés) es una de estas técnicas, que proyectando los patrones básicos de Hadamard sobre el objeto y utilizando un detector de un solo píxel para medir la intensidad de la luz resultante, es capaz de obtener imágenes con alta precisión y buena resistencia al ruido (Z. Zhang et al., 2017b).

En el método de escaneo de base de Hadamard se obtienen todas las medidas, que consiste en un producto interno entre los patrones proyectados y el objeto. Este último proceso permite reconstruir perfectamente una imagen, aunque ocupa demasiado tiempo, esto es una limitante para aplicaciones en tiempo real, por lo que las mediciones se obtienen eligiendo los patrones más relevantes. Una manera de enfrentar este problema es utilizar ordenamientos ya conocidos de la matriz de Hadamard como son: la matriz de Walsh-Paley Hadamard, el ordenamiento diádico y la transformada de Haar normalizada (Agaian et al., 2011). Cabe mencionar que también existen otras propuestas

que aprovechan la estructura bidimensional de los patrones de Hadamard para ordenarlos en orden descendente de importancia. Por lo tanto, el cómo mejorar la calidad de la imagen y reducir el tiempo de adquisición de la imagen de un solo píxel, es un tema de investigación vigente y se explora ampliamente en campos como la óptica (Lu et al., 2020).

Las técnicas de un solo píxel han comenzado a revolucionar el campo de la imagen. Sin embargo, no son perfectas. Por lo que se considera un desafío desarrollar soluciones creativas utilizando las herramientas, técnicas y conocimientos disponibles hoy en día. El tema es importante ya que, si se logra desarrollar una técnica eficiente y de alta precisión, su implementación beneficiará el estudio de fenómenos dinámicos tales como: objetos en movimiento, preservación de piezas antiguas, microscopía óptica, análisis de tejidos vivos, control de eventos en tiempo real, entre otras.

## 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Durante la última década, los investigadores en las áreas de la visión por computadora y la óptica han presentado diferentes técnicas de no contacto para obtener la forma relativa de un objeto. Sin embargo, a veces estas técnicas se ven limitadas ya que cada vez se necesita procesar mayor cantidad de información, con alta precisión, a una menor velocidad e inclusive en tiempo real. En este contexto, se ha detectado que las imágenes de un solo píxel han tenido problemas de reconstrucción de baja calidad mientras aumentan la rapidez con la que obtienen un objeto y un largo tiempo de adquisición de datos en búsqueda de una alta resolución de la imagen, de los anteriores planteamientos surgen las siguientes preguntas de investigación:

¿Cuáles son las técnicas de un solo píxel que existen para recuperar la información de un objeto?

¿Cómo plantear una técnica eficiente para la recuperación de un objeto?

¿Cómo modelar y construir un sistema, sencillo que permita la ejecución del proceso de recuperación de un objeto?

Ya que las técnicas de reconstrucción de objetos no han alcanzado una adquisición eficiente de la imagen, sobre todo en situaciones en tiempo real, se considera oportuno realizar investigación intentando resolver estos problemas.

## 1.2. OBJETIVOS

De acuerdo con el problema planteado, enseguida se presenta el objetivo general de esta investigación y después se describen sus objetivos específicos.

### 1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Proponer una técnica para la reconstrucción de objetos a partir de técnicas de Un Solo Píxel y un ordenamiento eficiente de patrones de Hadamard, buscando mejorar la calidad y la velocidad de restauración de la imagen.

### 1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Investigar las diferentes técnicas de luz estructurada que existen para recuperar imágenes de objetos.
- Analizar las técnicas de un solo píxel y transformada de Hadamard en busca de sus principales ventajas y desventajas.
- Construir una técnica de un solo píxel basada en la transformada de Hadamard, combinando sus principales ventajas.
- Realizar pruebas de desempeño y evaluación experimental de la técnica propuesta, en ambientes controlados.
- Interpretar los resultados derivados de los experimentos realizados y compararlos con los de otras técnicas.

- Evaluar los resultados obtenidos para su publicación.

## 1.3. HIPÓTESIS

Si se logra un ordenamiento eficiente de los patrones de Hadamard que son más resistentes al ruido y se aplican en un sistema SPI que han demostrado ser más rápidos que los métodos tradicionales, entonces se podrá proponer una técnica eficiente para restaurar una imagen con alta precisión.

### 1.3.1. IDENTIFICACIÓN DE LAS VARIABLES

**Las variables independientes son:**

- La iluminación sobre la imagen.
- Los patrones de Hadamard proyectados.
- Fuentes de ruido en los experimentos.

**La variable dependiente es:**

- La imagen restaurada.

## 1.4. METODOLOGÍA

En esta tesis se realizó una investigación documental basada en la búsqueda y recopilación de información en bases de datos académicas de referencias bibliográficas y el análisis de publicaciones previas, también se utilizó enfoque cuantitativo apoyado en la medición y la comprobación ya que se obtienen datos medibles y objetivos.

La investigación se basa en una metodología experimental que según Razo (2011) es un proceso científico, lógico, metódico y ordenado de procedimientos secuenciales para observar comportamiento del estudio y la

modificación de sus variables, de acuerdo con un diseño experimental que parte de una hipótesis, para someterla a prueba y en la que el investigador realiza cambios controlados en las variables para analizar el comportamiento del objeto de estudio en un ambiente real donde tiene lugar el experimento. Y que con los resultados obtenidos, se puede validar o negar la hipótesis.

## 1.5. ESTRUCTURA DE LA TESIS

El resto del trabajo de Tesis se encuentra estructurado de la siguiente manera:

- **Capítulo 2. Teoría y métodos.** En esta sección se exponen las bases teóricas de los conceptos, conocimientos y técnicas sobre las cuales se fundamenta esta investigación y que están relacionados con el campo de estudio, además, se explica a detalle el funcionamiento de la técnica de un solo píxel, cómo se generan los patrones de Hadamard y los demás conceptos que sirven como base para comprender el tema de tesis.
- **Capítulo 3. Estado del arte.** En este capítulo se presenta un análisis documental de los principales artículos de investigación y trabajos recientes que se han realizado. Se cita a los autores, se describen brevemente sus investigaciones, los métodos utilizados y los resultados que obtuvieron. Con la finalidad de presentar, conceptos, ideas y opiniones de trabajos previos.
- **Capítulo 4. Técnica de ordenamiento propuesta.** Aquí se presenta el fundamento matemático de la técnica de ordenamiento propuesta, se describe a detalle cómo fue construida, se explica su funcionamiento y se indica el nombre que se le asignó.
- **Capítulo 5. Resultados y discusión.** En este apartado se muestran los resultados que se obtuvieron de las simulaciones y de los experimentos de la técnica de ordenamiento propuesta, se realiza un análisis algorítmico

para determinar su complejidad computacional, luego, mediante una comparación con otra técnica llamada Cake Cutting (CC), se realiza una discusión sobre ambas técnicas.

- **Capítulo 6. Conclusiones y trabajo futuro.** En este capítulo se exponen las conclusiones obtenidas sobre la técnica propuesta, con base en el análisis algorítmico realizado y los resultados obtenidos, también se propone una lista de posibles trabajos de investigación futuros.
- **Apéndices.** Por último, en el Apéndice A, se incluyen los códigos fuente utilizados en las simulaciones y en el Apéndice B, se enlistan y se presentan las portadas y constancias de los productos de investigación que se generaron a partir de este tema de investigación.

---

# Teoría y métodos

Una imagen es una representación visual de un objeto real o imaginario captada por: el ojo humano, un aparato óptico, por un espejo o por una placa fotográfica, gracias a los rayos de luz que recibe y proyecta.

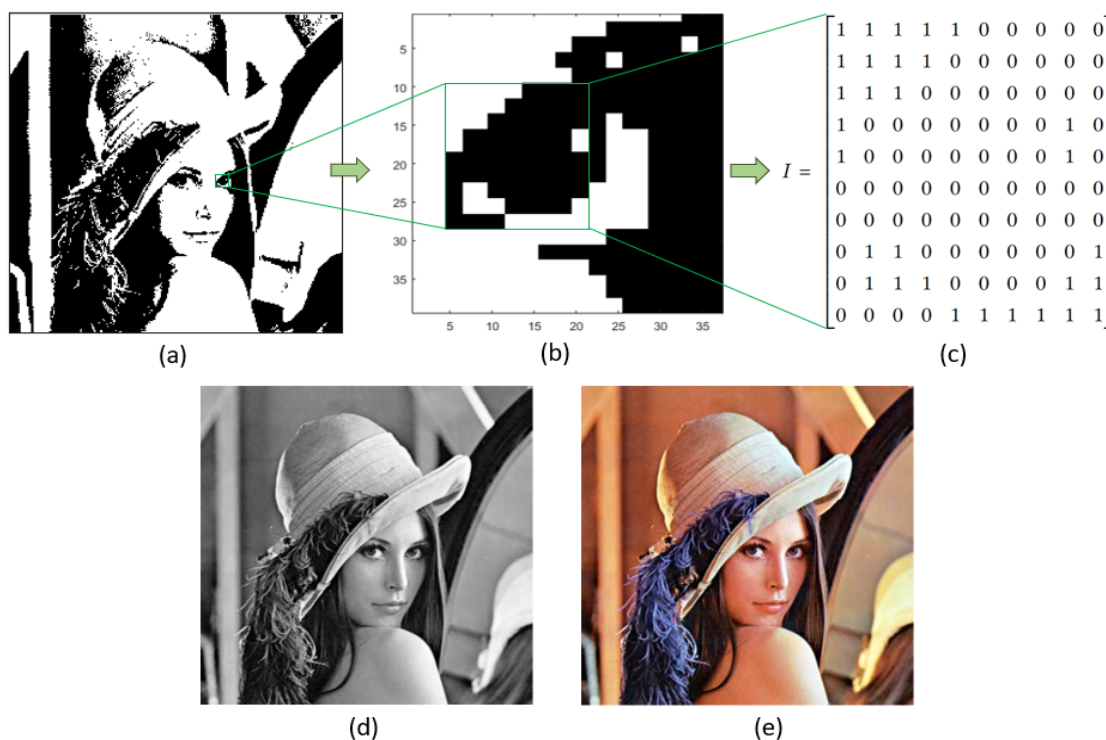
## 2.1. IMAGEN DIGITAL

Una imagen digital es una función bidimensional  $I = f(x, y)$  donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas espaciales y los valores que toman son proporcionales al brillo o nivel de gris para imágenes en blanco y negro, está representada matemáticamente por una matriz que es un arreglo bidimensional, que tiene una dirección en el eje  $x$  que representa las filas y otra en el eje  $y$  que representa las columnas.

La intersección entre una fila y una columna es el elemento mínimo que compone una matriz y es conocido como un píxel (acrónimo del inglés picture element, elemento de imagen). Los valores del píxel son números binarios de longitud  $k$ , de modo que un píxel puede representar cualquiera de los  $2^k$  valores diferentes. El valor  $k$  se denomina profundidad en bits o simplemente profundidad de la imagen.

Según Burger y Burge (2016) en el área de visión por computadora se trabaja con imágenes digitalizadas a 8 bits, que se representan por valores que van del 0 al 255, donde: existen 256 posiciones, que también se representa como  $2^8$  cuyo resultado es 256. Existen diferentes tipos de imágenes digitales como son: imágenes binarias, imágenes en escala de grises e imágenes en color, algunos ejemplos que de estas imágenes se pueden apreciar en la Figura 2.1.

**Figura 2.1:**  
*Ejemplos de imágenes digitales.*



*Nota.* (a) Lena, ejemplo de una imagen en blanco y negro. (b) Acercamiento al ojo izquierdo de Lena, donde se pueden apreciar los píxeles que lo componen con valores en blanco y negro. (c) Se observa una representación matricial de una porción del ojo de Lena de  $10 \times 10$  píxeles con valores: 1 para el color blanco y 0 para el color negro. (d) Tipo de una imagen en escala de grises. (e) Ejemplo de imagen en color.

### 2.1.1. CLASIFICACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES

**Imágenes binarias.** Una imagen en su forma más simple es una imagen binaria (a blanco y negro) la cual es un tipo de imagen que tiene únicamente dos valores posibles para cada píxel: blanco o negro. Por lo

tanto, es posible representar una imagen mediante una matriz binaria utilizando un solo bit 0 o 1 por cada píxel. El 0 hace referencia al color negro o ausencia de luz y el 1 al color blanco o intensidad máxima de la luz, en la Figura 2.1(a) se muestra un ejemplo de este tipo de imágenes.

**Imágenes en escala de grises.** Una imagen en escala de grises consta de un solo canal que representa la intensidad de la energía de la luz o brillo de la imagen. Por ejemplo, una imagen típica en escala de grises usa  $k = 8$  bits (1 byte) por píxel y valores de intensidad en el rango de  $0, \dots, 255$ , donde el valor 0 representa el brillo mínimo (color negro) y 255 el brillo máximo (color blanco). Los números intermedios entre 0 y 255 dan origen a una diversa gama de intensidades de blancos y negros que se conoce como escala de grises, como se puede apreciar en la Figura 2.1(d).

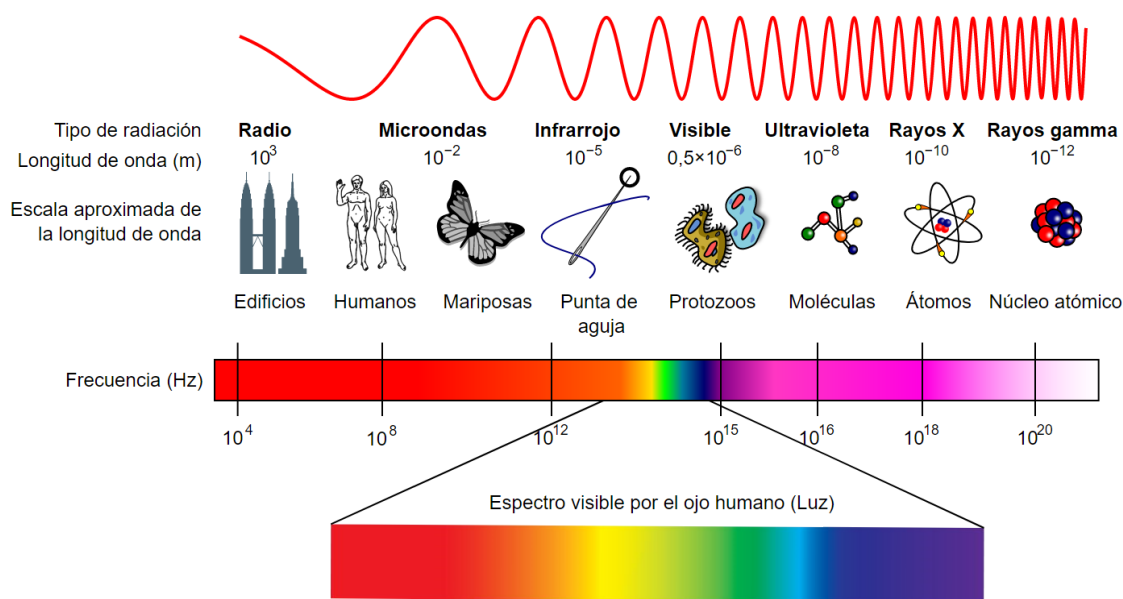
**Imágenes en color.** Citando a Burger y Burge (2016) las imágenes en color se expresan en el espacio de colores más simple conocido como: RGB (del inglés, Red, Green, Blue), se utilizan 8 bits para cada color. En estas imágenes, un píxel requiere de  $3 \times 8 = 24$  bits para representar otros colores y el rango del componente de color individual es  $[0, 255]$  en este tipo de imagen una posición de la matriz tiene tres valores, que representan la intensidad de cada uno de esos espacios de color y esa combinación genera una nueva intensidad que en su totalidad completa una imagen a color.

## 2.2. ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

De acuerdo con la NASA (2011), diariamente, las ondas electromagnéticas nos rodean, los humanos utilizan estas ondas, pero solo pueden ver una porción limitada de ellas (ver Figura 2.2). Estas ondas llevan las llamadas telefónicas, las transmisiones de radio, permiten ver en la oscuridad e incluso se ocupan para calentar la comida.

Un campo eléctrico es producido por el voltaje, los campos magnéticos resultan del flujo de corriente por alambres o por aparatos eléctricos. El conjunto de campos eléctricos y magnéticos recibe el nombre de campos electromagnéticos. El Espectro Electromagnético (EM) es el conjunto de longitudes de onda de todas las radiaciones electromagnéticas, incluye: las ondas radioeléctricas, microondas, la Radiación Infrarroja (IR), la luz visible, la radiación ultravioleta (UV), los rayos X, y los rayos gamma (Espectro, 2018). Para una mejor comprensión se recomienda analizar la Figura 2.2.

**Figura 2.2:**  
*Diagrama del Espectro Electromagnético.*



*Nota.* Se muestra el tipo de radiación, la longitud de onda con ejemplos, la frecuencia y el espectro visible por el ojo humano. Figura adaptada de El Espectro Eletromagnético, por Espectro (2018), espectro.org.br (<https://espectro.org.br/es/content/el-espectro-eletromagn%C3%A9tico>). CC BY-SA 4.0.

Los espectros se pueden observar mediante espectroscopios que, además de permitir ver el espectro, permiten realizar medidas sobre él, como son: la longitud de onda, la frecuencia y la intensidad de la radiación. Por lo que, los instrumentos que registran longitudes de onda diferentes al rango visible suponen una extensión del campo visual humano y proporcionan acceso a información adicional del mundo físico que nos rodea.

**Imagen multispectral.** Citando a Uzal (2019) una imagen multispectral es aquella que captura datos de imágenes dentro de rangos de longitud de onda específicos en el espectro electromagnético. Estas imágenes se forman por un conjunto de imágenes digitales (también llamadas bandas). La obtención de imágenes espectrales permite obtener información que el ojo humano no puede capturar ya que suelen tener resoluciones espectrales bajas y espaciales altas.

Algunos usos comunes de la tecnología multispectral pueden ser la obtención de imágenes de montañas, edificios o grandes extensiones de agua sobre la tierra y fueron desarrolladas originalmente para imágenes obtenidas desde el espacio (Uzal, 2019).

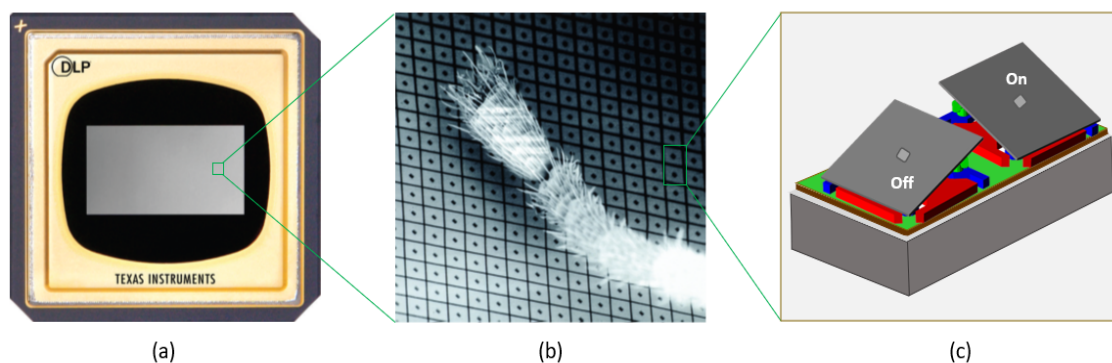
**Imagen hiperespectral.** Roman-Gonzalez y Vargas-Cuentas (2013), explican que una imagen hiperespectral es un caso especial de imagen que adquiere una escena real a partir de cientos de bandas espectrales de información a través de todo el espectro electromagnético. Una banda espectral es un rango del espectro que representa a cada imagen, estas imágenes se combinan y forman una imagen tridimensional hiperespectral. Esta técnica puede extenderse más allá de lo visible. Cada objeto/escena deja huellas únicas a lo largo del espectro electromagnético, a estas huellas se le conoce como firmas espectrales las cuales permiten la identificación de los materiales que componen un objeto analizado.

### 2.3. DISPOSITIVO DE MICRO ESPEJO DIGITAL DMD

Según Duarte et al. (2008), la tecnología SLM (Modulador de Luz Espacial, del inglés Spatial light modulator) se puede encontrar en los proyectores de luz digital modernos. Estos proyectores regularmente se basan en el Dispositivo de Micro Espejo Digital (DMD) de Texas Instruments, que es un tipo de semiconductor óptico. Un DMD se forma a partir de una matriz de cientos de miles de micro espejos cuadrados del tamaño de una bacteria, accionados

electrostáticamente, donde cada espejo de la matriz está suspendido sobre una celda individual de Memoria Estática de Acceso Aleatorio (SRAM, del inglés Static Random Access Memory), cada espejo gira alrededor de una bisagra y se puede colocar en uno de dos estados estables  $+10^\circ$  y  $-10^\circ$  desde la horizontal, según el bit que se cargue en la celda SRAM y que corresponden a los estados encendido y apagado respectivamente, de tal manera que en una orientación la luz se acopla desde la imagen al detector de un solo píxel y se le conoce como *estado = 1* mientras que la otra orientación no lo está y corresponde al *estado = 0*, por lo tanto, la luz que cae sobre el DMD se puede reflejar en dos direcciones dependiendo de la orientación de los espejos (ver Figura 2.3).

**Figura 2.3:**  
*Dispositivo de Micro espejo Digital DMD.*



*Nota.* Imagen a) Vista frontal de un DMD de Texas Instruments. (b) Se muestra una porción de la matriz del DMD comparada con una pata de hormiga para tener una referencia del tamaño de los micro espejos. (c) Esquema que muestra dos espejos de un DMD. Figura elaborada con datos de: “The Digital Micromirror Device a Historic Mechanical Engineering Landmark” (p. 8-13), por Texas Instruments 2008, The American Society of Mechanical Engineers. ©.

## 2.4. IMAGEN COMPUTACIONAL

La imagen computacional intenta equilibrar las capacidades de procesamiento de la óptica y la electrónica a través del diseño simultáneo y la optimización conjunta de ambos elementos, aprovechando que la electrónica facilita la transmisión, el almacenamiento y el procesamiento analógico y digital de imágenes (Mait et al., 2018).

El primer uso del término Imagen Computacional aparece en el artículo publicado por Mait et al. (2003) y dice que “un sistema integrado de imágenes computacionales es aquel cuyo diseño incorpora integralmente la óptica, la optoelectrónica y el procesamiento de señales”.

Una de las primeras referencias a un enfoque óptico-computacional para la obtención de imágenes es el trabajo de Cathey et al. (1984), que analiza cómo se puede aumentar la resolución o mejorar una imagen detectada electrónicamente mediante el diseño conjunto de la óptica y el procesamiento de la señal.

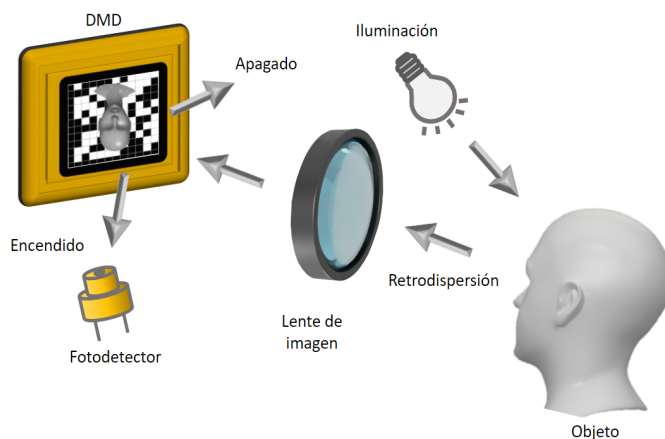
En general, el enfoque de imagen computacional busca optimizar el proceso de adquisición de imágenes utilizando óptica y empleando algoritmos computacionales para el procesamiento posterior a la transducción, que es la transformación de un tipo de señal en otro distinto, en este caso de analógica a digital. Existen dos tipos de configuración de imagen computacional: la Detección Estructurada y la Iluminación Estructurada.

#### 2.4.1. CONFIGURACIÓN DE DETECCIÓN ESTRUCTURADA

Esta configuración consiste en iluminar un objeto y enfocar su reflejo en el DMD, donde se puede utilizar una secuencia de patrones binarios mostrados en el DMD para enmascarar la imagen. También se utiliza un solo fotodiodo para medir la intensidad total filtrada para cada patrón de máscara, lo que permite reconstruir una imagen del objeto (Edgar et al., 2019).

Es interesante señalar que los sistemas basados en un enfoque de detección estructurada y que emplean esquemas de muestreo como la Detección por Compresión CS (Compressive Sensing, por sus siglas en inglés) a menudo se denominan cámaras de un solo píxel (Gibson et al., 2020). Un esquema de esta configuración se puede apreciar en la Figura 2.4.

**Figura 2.4:**  
Configuración de Detección Estructurada.



*Nota.* Figura adaptada de: “Principles and prospects for single-pixel imaging” (p. 12), por Edgar et al. (2019), Nature Photonics, 13(1), ©.

## 2.4.2. CONFIGURACIÓN DE ILUMINACIÓN ESTRUCTURADA

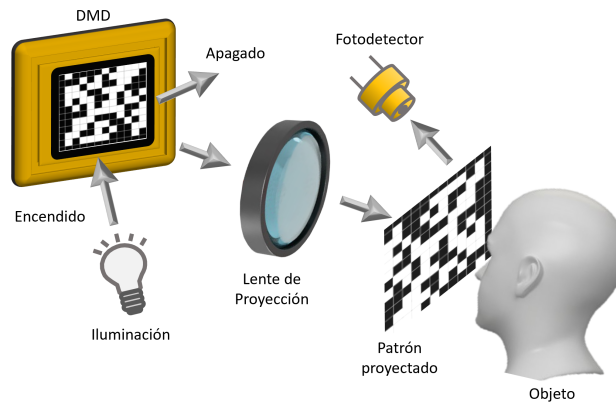
Según Gibson et al. (2020), en esta configuración el DMD se utiliza para proyectar una secuencia de patrones de luz sobre el objeto y el fotodetector mide la luz retro dispersada total. El registro de la forma temporal de la luz retro dispersada proporciona una medida de la distancia recorrida por la luz y por lo tanto, de la profundidad del objeto. Por último, la secuencia de patrones proyectados y las medidas de intensidad correspondientes permiten reconstruir la imagen (Figura 2.5).

En la opinión de Lee (2013) como el DMD se usa para proyectar patrones de luz sobre el objeto (un proyector de luz digital), a este proceso se le conoce como iluminación estructurada, a estos sistemas basados en iluminación estructurada comúnmente se les denominan Imágenes Fantasma Computacionales (Computational GI) (Shapiro, 2008).

## 2.4.3. DETECCIÓN POR COMPRESIÓN CS

La compresión de imágenes aborda el problema de reducir la cantidad de datos requeridos para almacenar una imagen. Las técnicas de CS permiten adquirir

**Figura 2.5:**  
Configuración de Iluminación Estructurada.



*Nota.* Figura adaptada de: “Single-pixel imaging 12 years on: a review” (p. 28193), por Gibson et al. (2020), Optics express, 28(19), ©.

menos datos y, aun así, recuperar la misma cantidad de información que con técnicas convencionales, lo que se traduce en el consumo de menos recursos tales como el tiempo de muestreo, el procesamiento y almacenamiento de datos. Por lo que cualquier proceso de compresión se basa en la eliminación de datos redundantes.

CS resuelve un sistema indeterminado de ecuaciones lineales imponiendo la restricción de dispersión, es decir, las señales con relativamente pocos términos. La cantidad mínima de mediciones de proyección requeridas para reconstruir una imagen está determinada por la escasez de la escena (Mait et al., 2018). Este criterio de escasez/compresión permite reconstruir una imagen con un número de muestreo por debajo del límite de muestreo de Nyquist-Shannon, este teorema establece que se requiere un número mínimo de muestras para capturar perfectamente una señal, cuando la señal es dispersa en una base conocida, se puede reducir enormemente el número de mediciones que deben almacenarse (Baraniuk, 2007).

La propiedad de “escasez”, es clave para muchos problemas de medición y da lugar a los campos de compresión de datos y detección comprimida (Edgar

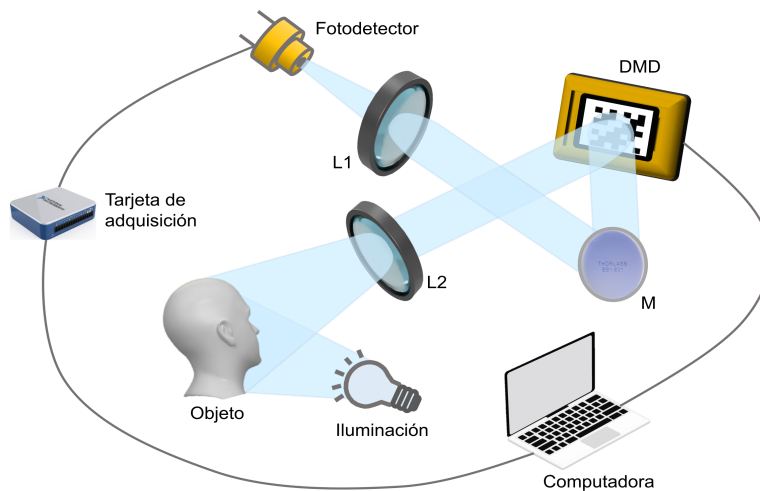
et al., 2019). De hecho, la escasez de imágenes, en términos de sus frecuencias espaciales, es la base de las técnicas de compresión de imágenes como JPEG (Aravind et al., 1989).

Por ejemplo, Candes y Tao (2006) demostraron que, sí los objetos de interés son dispersos en una base comprimible, entonces es posible reconstruir una imagen con una precisión muy alta a partir de un pequeño número de mediciones aleatorias resolviendo un programa lineal simple.

## 2.5. IMAGEN DE UN SOLO PÍXEL

De acuerdo con Edgar et al. (2019) una configuración experimental típica de SPI se puede componer de: una fuente de luz, un Modulador de Luz Espacial, una computadora, una lente de colección, una lente de proyección, una tarjeta de adquisición de datos y un detector de un solo píxel. En la Figura 2.6 se muestra un esquema de la configuración experimental para SPI y su funcionamiento se describe en los siguientes párrafos.

**Figura 2.6:**  
*Esquema de la configuración experimental de SPI.*

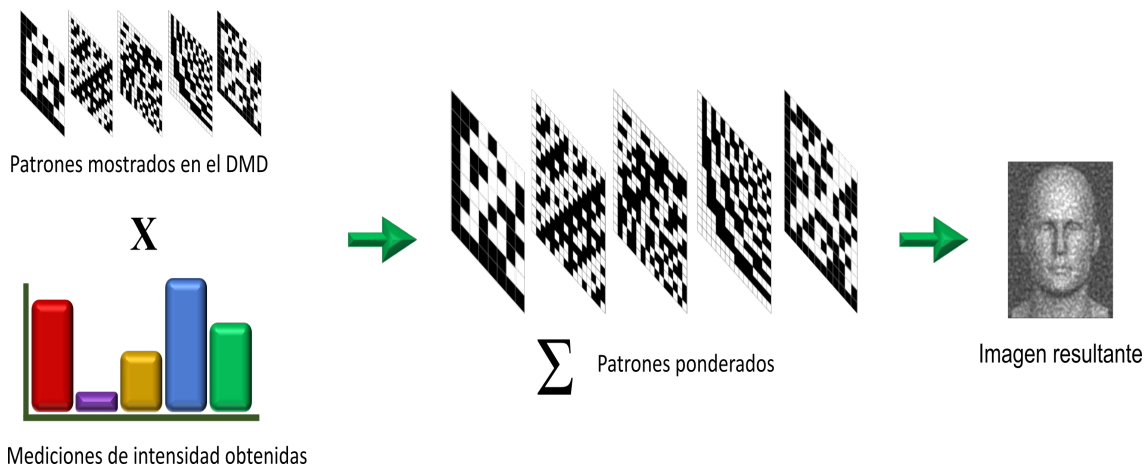


*Fuente.* Elaboración propia.

En la Figura 2.6 el DMD se utiliza para filtrar la luz incidente sobre él y en función del ángulo de cada micro espejo. El objeto es iluminado por un diodo LED blanco. Después, el fotodetector mide la luz retro dispersada recolectada por las lentes L1, L2 y M, para obtener una medición, que es enviada a la tarjeta de adquisición. El DMD y el fotodetector están sincronizados por la computadora que también almacena todos los valores medidos. Como puede verse, el DMD se limita a generar solo patrones binarios, por lo que las series de patrones  $p_j$  deben ser matrices binarias, regularmente se utilizan matrices de Hadamard (Gibson et al., 2020).

El objeto se restaura multiplicando cada patrón de la secuencia, por la medición de intensidad de un solo píxel correspondiente y se obtiene un conjunto de patrones ponderados que después se suman para formar el objeto, la restauración de una imagen de  $N$  píxeles en total, requiere una secuencia de  $M = N$  patrones diferentes como se observa en la Figura 2.7.

**Figura 2.7:**  
Restauración de un objeto con SPI.



*Nota.* Imagen adaptada de: “Single-pixel imaging 12 years on: a review” (p. 28193), por Gibson et al. (2020), Optics express, 28(19), ©.

Las mediciones que obtiene el detector de un solo píxel son un proceso lineal que se puede modelar de la siguiente manera:

$$m = Pf \tag{2.1}$$

donde  $f \in \mathbb{R}^d$  es la imagen deseada,  $d$  es el número total de píxeles en la imagen, es decir  $d = \text{alto} \times \text{ancho}$ . La matriz  $P = [p_1 \dots p_k]^T \in \mathbb{R}^{k \times d}$  cuyas filas  $p_j \in \mathbb{R}^d$  son los patrones para  $j = 1, \dots, k$  y  $m \in \mathbb{R}^k$  son las medidas correspondientes.

En el modelo simplificado dado en la Ecuación 2.1, se omite el aporte de la corriente de oscuridad provocada por el fotodetector, lo cual se justifica al utilizar el método diferencial (Watts et al., 2014). El proceso de obtención de la imagen  $f$  dado el conjunto de patrones  $P$  y medidas  $m$  se denomina restauración.

### 2.5.1. MÉTODOS DE MUESTREO

Como señalan Manolakis y Proakis (2014), la mayoría de las señales son analógicas, por lo que para procesarlas se requiere convertirlas a un formato digital, es decir, convertirlas a una secuencia de números con presión finita. Este procedimiento se denomina conversión de analógico a digital (A/D) y consta de los siguientes tres pasos:

1. Muestreo. Consiste en convertir una señal continua en una señal discreta que se obtiene tomando “muestras” de la señal continua en instantes de tiempo discreto.
2. Cuantización. Es la conversión de una señal de valores discretos a una señal digital de valores discretos.
3. Codificación. Consiste en traducir los valores obtenidos durante la cuantificación a código binario.

Durán et al. (2012) propusieron una técnica de muestreo empleando patrones de base ortogonales formados con matrices de Hadamard para la iluminación. Otros autores han utilizado la transformada de Fourier (Z. Zhang et al., 2015) o también wavelets (Rousset et al., 2016). En la opinión de Edgar et al. (2019) las técnicas de escaneo basados en patrones binarios de base Hadamard son adecuados para la realización experimental debido a su naturaleza binaria ya que se pueden proyectar o filtrar utilizando la tecnología DMD como un Modulador Espacial de Luz.

### 2.5.2. MÉTODOS DE RESTAURACIÓN

Al proceso de obtener la imagen se le conoce como restauración. Según Bian et al. (2018) existen varios algoritmos de restauración que resuelven el sistema dado en la Ecuación 2.1 que se pueden agrupar en tres categorías:

1. Métodos no iterativos basados en resolver el sistema dado en la Ecuación 2.1 por inversión de matriz cuando sea posible.
2. Métodos iterativos lineales que utilizan el algoritmo de optimización de descenso de gradiente, el método de máxima verosimilitud de Poisson y proyección alterna.
3. Métodos iterativos no lineales que utilizan métodos como el algoritmo de regularización por Variación Total (TV) (C. Li et al., 2013) y el algoritmo NESTA (Becker et al., 2011).

## 2.6. PATRONES DE BASE HADAMARD

Un patrón de Hadamard se construye a partir de una matriz de Hadamard la cual se define como una matriz  $M \times N$  con elementos que toman los valores de  $+1$  o  $-1$  y es ortogonal. El orden de una matriz Hadamard debe ser 1, 2, o múltiplos de 4 (Agaian et al., 2011).

Una matriz cuadrada  $H_N$  de orden  $N$  con elementos  $+1$  o  $-1$ , se llama Matriz de Hadamard si cumple lo siguiente:

$$H_N H_N^T = N I_N \quad (2.2)$$

donde  $I_N$  es la matriz identidad de orden  $N$ .

Las matrices de Hadamard de orden  $N = 2^n$  donde  $n$  es un número entero se denominan matrices de Sylvester. Si  $H$  es una matriz de Hadamard de orden  $N$ , entonces se puede obtener una matriz de orden  $2N$  como:

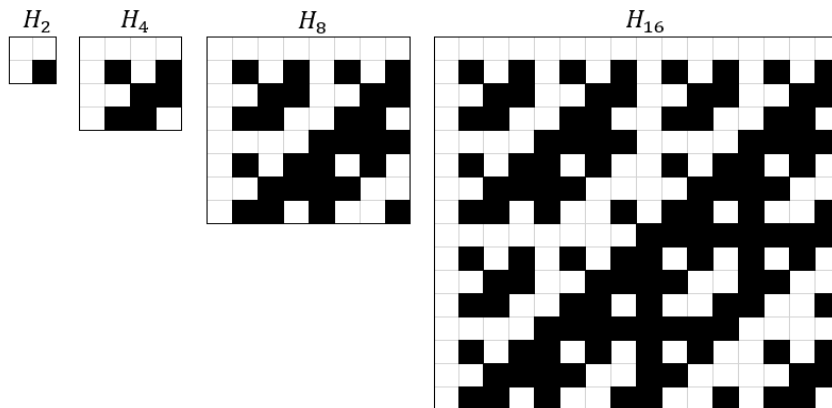
$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

En seguida se presentan dos ejemplos de una matriz de orden 2 y orden 4, en las que los símbolos  $+$  y  $-$  denotan  $+1$  y  $-1$ , respectivamente:

$$H_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

En particular, la transformada de Hadamard tiene la propiedad de ser una matriz simétrica al igual que su inversa. Otra característica es que los elementos de la primera fila y columna son todos positivos. En la Figura 2.8 se presenta un ejemplo de las matrices de Hadamard de Orden Natural, correspondientes a los ordenes 2, 4, 8 y 16.

**Figura 2.8:**  
 Matrices de Hadamard de orden natural.



*Nota.* Se muestran matrices de Hadamard de ordenes 2, 4, 8 y 16.

## 2.7. IMAGEN DE UN SOLO PÍXEL BASADA EN LA TRANSFORMADA DE HADAMARD

SPI basado en la transformada de Hadamard consiste en construir una matriz de Hadamard cuyas filas se utilizan como patrones, luego las medidas se obtienen como:

$$m = H_N f \quad (2.5)$$

Donde la imagen restaurada  $f$  tiene una dimensión de una potencia de 2. Por ejemplo, si se desea restaurar una imagen de dimensión  $d = 2^n \times 2^n = 2^{2n}$  entonces, el orden de la matriz de Hadamard es  $N = 2^{2n}$ . La imagen restaurada después de la proyección de todos los patrones base se obtiene teóricamente como:

$$f = \frac{1}{N} H_N m. \quad (2.6)$$

Para hacer frente a los valores negativos de  $H_N$ , se utiliza el método diferencial en el que dos patrones de matriz se definen como:

$$H_N = H_N^+ - H_N^- \quad (2.7)$$

donde  $H_N^+$  y  $H_N^-$  son patrones binarios tales que, la matriz  $H_N^+ = (H_N + 1_N)/2$  es cero en cada entrada negativa de  $H_N$ , la matriz  $H_N^- = (1_N - H_N)/2$  es cero en cada entrada positiva  $H_N$  y  $1_N$  es una matriz de unos de orden  $N$ . Por lo tanto, las medidas  $m_+$  y  $m_-$  se obtienen usando los patrones  $H_N^+$  y  $H_N^-$  respectivamente, luego se restan para obtener la medición  $m = m_+ - m_-$ .

## 2.8. MODELOS DE RUIDO EN IMÁGENES

Como señala Bovik (2009), se conoce como ruido a la alteración del brillo y el color, por una señal no deseada. Se dice que ese ruido corrompe la imagen, algunas causas de la aparición de la señal no deseada son: el uso de equipos defectuosos, fenómenos naturales y errores en la compresión y transmisión. Es evidente entonces que la eliminación del ruido es uno de los objetivos para restaurar la calidad real de una imagen.

Enseguida se describen algunos modelos de ruido en imágenes.

- **Ruido Sal y Pimienta.** Es un tipo de ruido ocasionado por un defecto del sensor que captura la imagen, en ocasiones se debe a manchas de polvo dentro de la cámara por lo que, la imagen se ve como un conjunto aleatorio de puntos blancos sobre puntos negros o puntos negros sobre puntos blancos, de ahí el término sal y pimienta (Zhou-Shy, 2020) (ver Figura 2.9b).
- **Ruido Gaussiano.** Quizá este tipo de ruido aparece con mayor frecuencia en las imágenes y consiste en que cada uno de los píxeles de

la imagen cambian su valor, de acuerdo con una distribución normal o Gaussiana. Este ruido surge durante la adquisición de la imagen, lo puede generar el sensor, por una iluminación deficiente o una temperatura alta (Bovik, 2009). Un ejemplo se puede observar en la Figura 2.9c.

- **Ruido Poisson.** También se le conoce como ruido de disparo, se da cuando la cantidad de fotones en el sensor de captura no es lo suficientemente fuerte como para marcar fluctuaciones estadísticas en una medición (Jin et al., 2014). Un ejemplo de este ruido se muestra en la Figura 2.9d.
- **Ruido de Cuantificación.** Este tipo de ruido consiste en un error de redondeo que se da al convertir la señal analógica a digital, comúnmente no se aprecia y se puede reducir usando un sensor que almacene más bits por píxel (Chervyakov et al., 2018).
- **Ruido de Corriente Oscura.** También conocido como *Ruido Termal*, se produce por el calor de la cámara, que al ser una radiación electromagnética puede mostrarse en el sensor y como no es parte de la escena es considerado ruido (Kublitski et al., 2021).
- **Ruido Moteado o de Manchas.** En la opinión de Choi y Jeong (2020) el ruido *Moteado* o *de Manchas* (del inglés Speckle Noise) es un tipo de ruido multiplicativo que consiste en manchas que causan dificultades en la interpretación de las imágenes.

## 2.9. MÉTRICAS DE EVALUACIÓN EN LA RESTAURACIÓN

Para medir la calidad en la restauración de una imagen se pueden utilizar: la Relación Señal Ruido SNR (del inglés, Signal-to-Noise Ratio), el Error Cuadrático Medio RMSE (Root Mean Square Error) y el Índice de Similitud Estructural SSIM (Structural Similarity Index) entre otros.

**Figura 2.9:**  
*Ejemplos de modelos de ruido.*



*Nota.* (a) Imagen original. (b) Imagen con ruido sal y pimienta. (c) Ejemplo de imagen con ruido Gaussiano. (d) Imagen con ruido Poisson.

**Relación señal/ruido**, en palabras de Burger y Burge (2016), SNR es una medida común para cuantificar la pérdida de calidad de una imagen. Se define como la relación entre la energía de señal promedio  $P_{señal}$  y la energía de ruido promedio  $P_{ruido}$ , por lo tanto, todas las desviaciones entre la imagen original y la cuantificada se consideran “ruido”. La relación señal-ruido generalmente se especifica en una escala logarítmica con la unidad de medida en decibel ( $dB$ ).

**Error cuadrático medio**, como señalan Chai y Draxler (2014), el RMSE se ha utilizado como una métrica estadística estándar para medir el rendimiento y se calcula usando la siguiente ecuación:

$$\text{RMSE} = \left[ \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{m,n} (I_1(i,j) - I_0(i,j))^2 \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

donde  $I_0$ ,  $I_1$  son imágenes 2D de tamaño  $m \times n$  píxeles. Generalmente, el RMSE mide la diferencia entre una imagen de referencia  $I_0$  y una imagen objetivo  $I_1$ . En el contexto de SPI, cuanto menor sea el valor de RMSE, mejor será la calidad de la imagen restaurada.

**Índice de similitud estructural**, la métrica SSIM se utiliza para evaluar la calidad de la imagen que va de 0 a 1; cuanto mayor sea el valor SSIM, mejor será la similitud de la imagen restaurada, el SSIM ( $x$ ,  $y$ ) se calcula de la siguiente manera:

$$\text{SSIM}(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)} \quad (2.9)$$

donde para una claridad notacional  $x$  representa la imagen de referencia  $I_0$  e  $y$  es la imagen restaurada  $I_1$ ;  $\mu_x$  y  $\mu_y$  son el valor medio de  $x$  y  $y$ , respectivamente;  $\sigma_{xy}$  es la covarianza de  $x$  y  $y$ ;  $\sigma_x^2$  y  $\sigma_y^2$  son la varianza de  $x$  y  $y$ , respectivamente; y  $c_1$  y  $c_2$  son constantes para estabilizar la división con un denominador débil (Wang et al., 2004).

## 2.10. ANÁLISIS DE ALGORITMOS

De acuerdo con la Real Academia de la lengua Española RAE (2021), un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de instrucciones que permiten solucionar un problema y consta de tres partes: una entrada, un procesamiento y una salida, un esquema de estas partes se puede apreciar en la Figura 2.10. Valenzuela-Ruz (2003) refiere que el análisis de algoritmos permite medir la dificultad inherente de un problema y evaluar la eficiencia de un algoritmo.

Según el tipo de operación que se realiza el análisis de algoritmos se puede clasificar en:

**Peor caso:** que indica el mayor tiempo obtenido, teniendo en consideración todas las entradas posibles.

**Mejor caso:** muestra el menor tiempo obtenido, considerando todas las entradas posibles.

**Caso promedio:** se refiere al tiempo medio obtenido, considerando todas las entradas posibles y es considerada la medida más realista.

**Figura 2.10:**  
*Partes de un Algoritmo.*



*Nota. Entrada:* Se refiere a la información con la que va a trabajar el algoritmo para ofrecer una solución esperada. *Procesamiento:* Es el conjunto de pasos que el algoritmo realiza a partir de los datos de entrada, para llegar a la solución del problema. *Salida:* Son los Resultados obtenidos a partir del proceso de los valores de entrada.

Una medida que suele ser útil en el *Tiempo de Ejecución* y se conoce en función de  $N$  y se denomina  $T(N)$ , se puede medir físicamente con un reloj o se puede calcular sobre la instrucción o programa, contando instrucciones a ejecutar y multiplicando por el tiempo requerido por cada instrucción (Valenzuela-Ruz, 2003).

Al estudio de la cantidad de recursos tiempo o memoria que el algoritmo necesita para resolver un problema se le conoce como *Complejidad* y se expresa en función del tamaño del problema y el comportamiento de la función y determina la eficiencia del algoritmo (Valenzuela-Ruz, 2003).

El principal interés del análisis de algoritmos reside en saber cómo incrementa el tiempo de ejecución, cuando el tamaño de la entrada crece. Eso es la *eficiencia asintótica* del algoritmo y se denomina *notación asintótica* porque analiza el comportamiento de las funciones en el límite, es decir, su tasa de crecimiento (Cormen et al., 2009).

Se utiliza la notación  $O$  también conocida como *O Mayúscula* para comparar funciones, es particularmente útil cuando se busca analizar la complejidad de un algoritmo, en otras palabras, la cantidad de tiempo que le toma a una computadora ejecutar un programa.

Otro concepto importante es el *Orden de Complejidad* que se refiere a la técnica para diferenciar la eficiencia de un algoritmo, regularmente se expresa en términos de la cantidad de datos que se procesan y se denomina  $n$ , que se refiere al tamaño dado o estimado.

**Tabla 2.1:**  
*Órdenes de complejidad.*

<i>Función</i>	<i>Orden</i>
$O(1)$	constante
$O(\log n)$	logarítmico
$O(n)$	lineal
$O(n^2)$	cuadrático
$O(n^a)$	polinomial ( $a > 2$ )
$O(a^n)$	exponencial ( $a > 2$ )
$O(n!)$	factorial

*Nota.* Se puede identificar una jerarquía de órdenes de complejidad que coincide con el orden de las funciones en esta tabla. Elaborada con datos de: “Manual análisis de algoritmos, versión 1.0” (p. 34-39), por Valenzuela-Ruz (2003), Área Informática y Telecomunicaciones, ©.

Se dice que  $O(f(n))$  define un *Orden de Complejidad* y se escoge como representante de este orden a la función  $f(n)$  más sencilla del mismo, de esta manera se obtiene la Tabla 2.1:

---

## Estado del Arte

Los investigadores de las áreas de la visión por computadora y la óptica, constantemente han desarrollado técnicas para recuperar la forma tridimensional y la apariencia de los objetos. La visión por computadora se utiliza en una amplia variedad de aplicaciones del mundo real que incluyen, por ejemplo: la detección de rostros, el reconocimiento automático de placas de vehículos (ANPR del inglés, Automatic Number Plate Recognition), en los vehículos autónomos para la detección de obstáculos inesperados como peatones en la calle, la restauración de imágenes, la búsqueda de defectos en piezas de fundición de acero con visión de rayos X, el análisis de tráfico en carretera y muchas otras aplicaciones interesantes, sin embargo, estas técnicas aun no son perfectas (Steger et al., 2018).

De acuerdo con López-García et al. (2020) existen aplicaciones que requieren el procesamiento de las imágenes en tiempo real, lo que abre una oportunidad para proponer técnicas eficientes por ejemplo implementaciones en paralelo. Las propuestas utilizan hardware especial para aumentar los recursos computacionales como: Unidades de Procesamiento de Gráficos (GPU), Matrices de Compuertas lógicas Programables en Campo (FPGA), Unidades de Procesamiento Central (CPU) multiprocesadores y CPU con múltiples núcleos.

Es evidente entonces que siempre existirá interés en técnicas para mejorar la resolución, la velocidad y aumentar el campo de visión en la restauración de imágenes. En seguida se presentan algunos trabajos de investigación recientemente publicados por diferentes autores y que están relacionados con el tema de estudio de esta tesis.

### 3.1. TÉCNICAS NOVEDOSAS

Karpinsky et al. (2014) presentaron un sistema de medición tridimensional que procesa simultáneamente: la adquisición, la reconstrucción y la visualización de objetos 3D en la GPU, mediante el uso de un escáner 3D de luz estructurada. Por otro lado, Liu et al. (2017) propusieron y demostraron una técnica que utiliza iluminación estructurada basada en una transformación de coseno discreto bidimensional para restaurar imágenes con un detector de un solo píxel.

Rousset et al. (2018) demostraron experimentalmente un esquema de adquisición multispectral utilizando una estrategia adaptativa que permite reducir drásticamente los tiempos de adquisición y reconstrucción de imágenes con respecto a los enfoques convencionales de SPI que se basan en la detección comprimida o escaneos de base completa. De hecho, unas técnicas se pueden combinar con otras, como lo hicieron Bian et al. (2018) quienes refieren que la técnica de CS, puede utilizarse en la etapa de reconstrucción, en imágenes de un solo píxel para reducir las mediciones y por consiguiente el tiempo. En ese mismo año Higham et al. (2018) publicaron la aplicación del aprendizaje profundo (en inglés, Deep Learning) con redes convolucionales en cámaras SPI y lograron obtener video en tiempo real de  $128 \times 128$  píxeles a 30 cuadros por segundo a partir de un muestreo de cámara de un solo píxel con una relación de compresión del 2%.

Mas tarde, Zhou et al. (2021) propusieron un enfoque novedoso llamado Imágenes Complementarias de un Solo Píxel de Fourier (CFSI) con el cual

lograron reducir el número de mediciones y mantener la robustez. Mediante esta propuesta, ellos ofrecen un enfoque alternativo para restaurar imágenes en tiempo real y de alta calidad.

## 3.2. APLICACIONES INTERESANTES DE SPI

Entre las diversas aplicaciones de SPI se encuentran el presentado por Li et al. (2017) que presentaron una configuración de prueba de concepto para imágenes hiperspectrales con aplicaciones para imágenes macroscópicas y biomédicas. También Gibson et al. (2017) lograron obtener imágenes de gas metano, que es un gas invisible, pero altamente explosivo. En ese mismo año Bai et al. (2017) pudieron obtener imágenes del movimiento de gusanos “C. Elegans”. El cual mide alrededor de 1 milímetro y en el área biomédica es de mucha utilidad para el estudio de enfermedades degenerativas y metabólicas.

Un año después Z. Zhang et al. (2018) publicaron una nueva perspectiva para la aplicación de SPI desarrollando un sistema de transmisión segura para bandas de ondas no visibles, permutando patrones básicos de Hadamard en bloque para la iluminación. En el mismo año, Joany y Logashanmugam (2018) diseñaron e implementaron un prototipo de cámara de un solo píxel que captura imágenes en la radiación visible para estudiar la reconstrucción de imágenes en el diagnóstico de tumores cerebrales.

Recientemente, Cisneros-Martínez et al. (2019) implementaron una cámara de un solo píxel y lograron reconstruir exitosamente imágenes de hasta  $128 \times 128$  píxeles, utilizando únicamente el 60% de las mediciones. Entre sus resultados demostraron que con esta técnica se pueden formar imágenes a través de medios altamente esparcidos, también lograron visualizar objetos por detrás de un maniquí con un espesor considerable, lo cual no es posible mediante fotografía tradicional.

Después, Jiao et al. (2020) en su artículo muestran que pudieron restaurar exitosamente imágenes que contenían información secreta, mediante lo que ellos llaman criptografía visual. Otra publicación interesante es la de Hahamovich et al. (2021) que mediante un sistema SPI lograron obtener la imagen de un objeto, esto sin que la cámara pueda mirar directamente la escena.

### 3.3. MÉTODOS DE MUESTREO

Últimamente, los métodos de muestreo utilizan un patrón de base ortogonal para obtener las mediciones, por ejemplo, la técnica de imágenes de un solo píxel de Hadamard (HSI) que es adecuada para la realización experimental debido a su naturaleza binaria de patrones (Gibson et al., 2020). Y las imágenes de un solo píxel de Fourier (FSI) (Z. Zhang et al., 2017a) que utiliza patrones de base de Fourier para codificar la información espacial y es capaz de reconstruir imágenes bidimensionales y tridimensionales de alta calidad, sin embargo, requiere patrones de base de Fourier en escala de grises para la iluminación, lo que representa una limitación en velocidad ya que el DMD genera patrones en escala de grises a una tasa de actualización baja. No obstante, ambas técnicas son capaces de restaurar imágenes de alta calidad, de hecho Z. Zhang et al. (2017b) presentaron un artículo en el que comparan los rendimientos de HSI y FSI con análisis y experimentos teóricos, sus resultados demostraron que FSI es más eficiente que HSI, mientras que HSI es más resistente al ruido que FSI, como conclusión ellos ofrecen una guía para que los investigadores elijan la técnica de imagen de un solo píxel adecuada para sus aplicaciones.

Otra técnica es la presentada por Rousset et al. (2016) quienes propusieron elegir patrones entre una base de wavelet de forma adaptativa, que esencialmente se basa en la predicción de la ubicación de los coeficientes de wavelet significativos. La predicción se basa en una interpolación cúbica rápida en el dominio de la imagen, ellos ofrecen un formalismo general para que se pueda utilizar cualquier tipo de wavelet, lo que permite ajustar la wavelet al

tipo de imágenes relacionadas con la aplicación deseada. Sus resultados tanto simulados como experimentales demostraron la capacidad de su técnica para reconstruir imágenes biomédicas con una calidad mejorada en comparación con la recuperación basada en CS.

### 3.4. MÉTODOS DE ORDENAMIENTO

Al utilizar bases Hadamard, se requiere un método de escaneo para obtener todas las medidas descritas como un producto interno entre los patrones y el objeto, este último proceso ocupa mucho tiempo, aunque reconstruye perfectamente una imagen. Pero si existieran restricciones de tiempo, por ejemplo, para una aplicación en tiempo real, se deben obtener las mediciones eligiendo los patrones más relevantes.

La primera forma de tratar este problema según Agaian et al. (2011) es utilizar los ordenamientos ya conocidos de la matriz de Hadamard como son: la matriz de Walsh-Paley Hadamard, a veces también llamado ordenamiento Diádico o la Transformada de Haar normalizada, un ejemplo de estos ordenamientos se puede apreciar en la Figura 3.1.

Pero también se han propuesto técnicas que aprovechan la estructura bidimensional de los patrones de Hadamard para acomodarlos en orden de importancia descendente. Por ejemplo, Sun et al. (2017) que propusieron el método Russian Doll (RD) cuyo principio es ordenar los patrones básicos con respecto a su significado cuando se usan imágenes naturales, la idea principal del método RD es explotar la simetría de la matriz de Hadamard y suponer que cuantos menos bloques contenga un patrón, más relevante será.

Ming-Fei et al. (2019) en su artículo, propusieron reducir el tiempo de adquisición de la señal mediante el uso de un esquema de muestreo novedoso basado en el ordenamiento optimizado de bases de Hadamard y mejorar la eficiencia de reconstrucción de la imagen mediante el uso de la transformada

rápida de Walsh-Hadamard. Entre sus resultados encontraron que su método de reordenación tiene mejor PSNR y SSIM y puede reconstruir la imagen bajo una relación de muestreo del 25% que corresponde al tiempo de recuperación en el que se obtienen imágenes de un solo píxel de 300 fotogramas por segundo a  $64 \times 64$  píxeles. Ellos concluyen que su ordenamiento simplifica en gran medida el procesamiento posterior, lo que da como resultado una reconstrucción de imágenes significativamente más rápida.

Otra propuesta es la de Yu (2019) que presentó un enfoque similar, llamado Cake-Cutting (CC), que se basa en la suposición de que cuantas menos regiones conectadas (que consisten en -1 o 1) contiene un patrón base, se obtiene la medición más significativa, un ejemplo de este ordenamiento se puede ver en la Figura 3.1(d).

También Yu y Liu (2019) propusieron una técnica llamada Origami Pattern Construction (OPC) que se basa en la técnica CC. Pero en la técnica OPC los patrones se construyen aprovechando la simetría y la simetría axial de los patrones como se puede ver en la Figura 3.1(e).

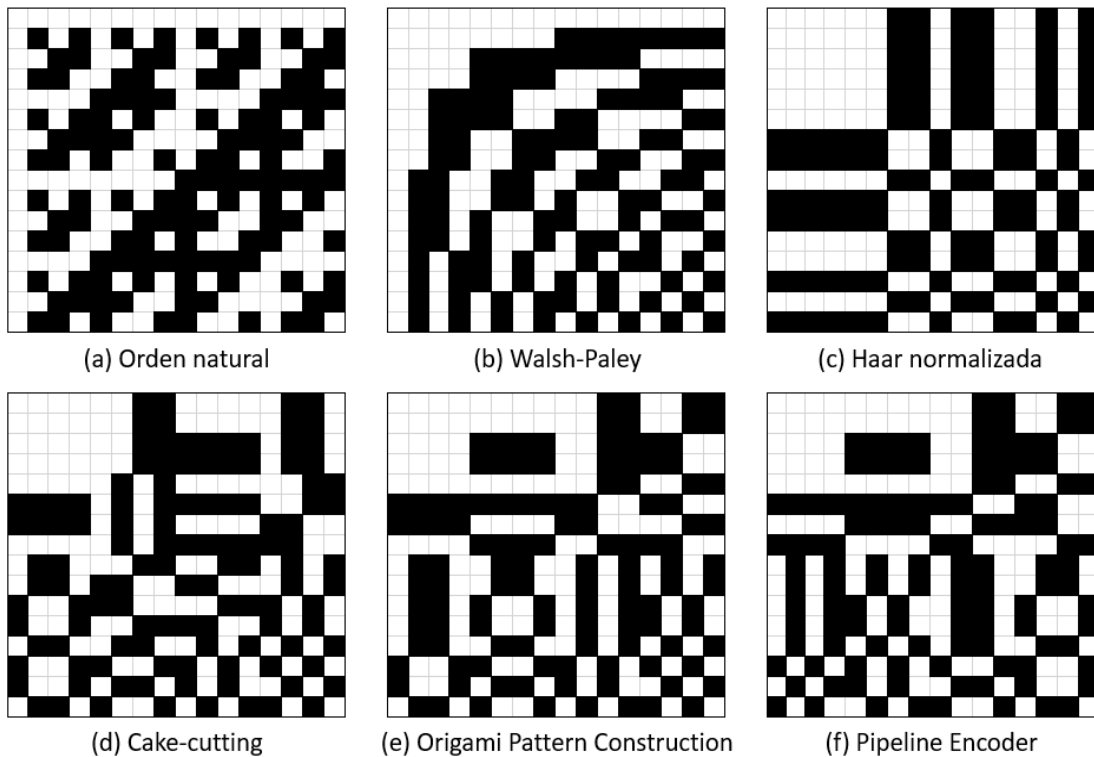
Otra técnica es la mostrada por Zhou et al. (2020) que propusieron una estrategia general para construir la base de Hadamard para SPI con aplicaciones de imágenes de resolución múltiple, basadas en el Codificador de Canalización de Hadamard (HPE, del inglés Hadamard Pipeline Encoder). El HPE permite la construcción de patrones base de alto orden según cuatro reglas básicas y genera otros ordenamientos como el RD. Como resultado, el PHE requiere mucho menos consumo de memoria para aplicaciones de imágenes de resolución múltiple y tiene un mejor rendimiento computacional que la construcción de patrones de base tradicional, una representación de este ordenamiento se puede ver en la Figura 3.1(f).

Las técnicas de clasificación RD, CC y OPC, se basan en determinar el número de regiones o bloques conectados dentro de un patrón, contar el

número de regiones conectadas es un proceso lento que incluso aumenta con la dimensión de la base de Hadamard. Por lo que es importante contar con un procedimiento eficiente que seleccione los patrones más significativos o que ordene los patrones de mayor a menor importancia.

**Figura 3.1:**

*Diferentes ordenamientos propuestos para las matrices de Hadamard.*



*Nota.* La imagen (a) es el Orden natural de Hadamard en este ejemplo para  $H_{16}$ , las siguientes representan algunas técnicas de ordenamiento que han sido propuestas por diferentes autores en los últimos años. Las celdas blancas representan el valor 1 mientras que las celdas de color negro representan  $-1$ .

# Técnica de ordenamiento propuesta

En esta tesis se propone una técnica eficiente que ordena los patrones base de Hadamard con una complejidad computacional de  $O(N^2)$  y que presenta un rendimiento similar a la técnica CC que según Ma et al. (2019) es considerado como uno de los mejores métodos de ordenamiento. En este capítulo se describe a detalle la técnica propuesta.

## 4.1. VECTORES BASE GENERALIZADOS

En este trabajo se ocupa una generalización de los vectores base presentados por Ben-Artzi et al. (2007) que se define como sigue, sea  $V_s^{(k)}$  el conjunto de vectores base unidimensionales:

$$V_s^{(0)} = \mathbf{s}, \quad (4.1)$$

$$V_s^{(k)} = \{[\mathbf{v}_s^{(k-1)} \alpha_k \mathbf{v}_s^{(k-1)}]\} \quad \text{t. q.} \quad \mathbf{v}_s^{(k-1)} \in V_s^{(k-1)}, \alpha_k \in \{+1, -1\}, \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{s}$  es un vector semilla inicial,  $\alpha_k \mathbf{v}$  indica la multiplicación del vector  $\mathbf{v}$  por el valor  $\alpha_k$  y  $[\cdot \cdot \cdot]$  denota concatenación.

Si  $|\mathbf{s}| = t$  es la longitud del vector semilla  $\mathbf{s}$  entonces el conjunto  $V_s^{(k)}$  forma un conjunto ortogonal de  $2^k$  vectores de longitud  $2^k t$ . La construcción del conjunto  $V_s^{(k)}$  se puede visualizar como un árbol binario de profundidad  $k$ . La Figura 4.1 (Árbol de arriba) muestra un ejemplo del conjunto  $V_s^{(k)}$  para  $k = 2$  utilizando el vector semilla  $\mathbf{s} = [1]$ . Los nodos en el nivel  $i$  representan los vectores de  $V_s^{(i)}$  y las hojas del árbol representan los cuatro vectores de  $V_s^{(2)}$ . Se puede ver que los vectores en  $V_s^{(2)}$  coinciden con los vectores fila de la matriz de Hadamard de tamaño  $4 \times 4$ . Las ramas del árbol están etiquetadas con el signo +/- de los valores  $\alpha \in \{+1, -1\}$  utilizados para crear los vectores. La sucesión  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_k$  a lo largo de las ramas del árbol define de forma única cada vector en  $\mathbf{v} \in V_s^{(k)}$ , que se llamará índice  $\alpha$  de  $\mathbf{v}$ . Se dice que dos vectores  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in V_s^{(k)}$  están relacionados con  $\alpha$  si y solo si la distancia de Hamming desde su índice  $\alpha$  es uno. En particular, si un conjunto ordenado de vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V_s^{(k)}$  que están relacionados consecutivamente con  $\alpha$ , entonces se denomina Secuencia de Código Gray (GCS).

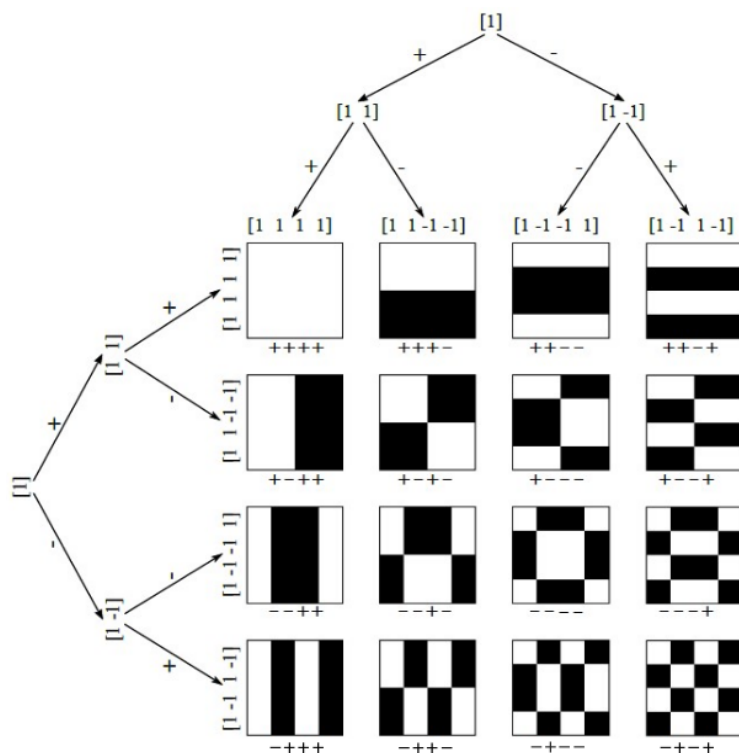
La versión bidimensional del conjunto  $V_s^{(k)}$  se puede definir como:

$$V_{s_1, s_2}^{(k_1, k_2)} = \{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_i \in V_{s_i}^{(k_i)}, i = 1, 2\} \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  es el producto exterior de los vectores unidimensionales  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , es decir, para cualquier  $\mathbf{v} \in V_{s_1, s_2}^{(k_1, k_2)}$ ,  $\mathbf{v}(i_1, i_2) = \mathbf{v}_1(i_1)\mathbf{v}_2(i_2)$  y  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  son vectores semilla. Cuando  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}$  se denota como  $V_s^{(k_1, k_2)}$  y los vectores de la forma  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  son llamados *separables*. En la Figura 4.1 (completa) se muestra un ejemplo de vectores ortogonales 2D que forman la matriz de Hadamard  $H_{16}$  de tamaño  $16 \times 16$  donde cada patrón 2D de tamaño  $4 \times 4$  corresponde a un vector fila de  $H_{16}$ . Se puede ver que para cualquier  $\mathbf{v} \in V_s^{(k_1, k_2)}$  tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ , con  $\alpha$ -índices asociados  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , la sucesión  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$  define de forma única

**Figura 4.1:**

Construcción del conjunto  $V_s^{(k)}$ .



*Nota.* (Árbol de arriba) conjunto ortogonal unidimensional  $V_s^{(k)}$  para  $k = 2$  utilizando el vector semilla  $\mathbf{s} = [1]$ . (Imagen completa) conjunto ortogonal bidimensional  $V_s^{(k_1, k_2)}$  para  $k_1, k_2 = 2$  empleando el vector semilla  $\mathbf{s} = [1]$ . Debajo de cada patrón 2D está el índice  $\alpha$  correspondiente, que se puede ver como una cadena binaria  $\rho$  de longitud  $n/2$ .

v. En la Figura 4.1, los índices  $\alpha$  se muestran debajo de cada patrón 2D que se obtiene al concatenar los índices  $\alpha_1, \alpha_2$  de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , respectivamente. El concepto de GCS también se puede aplicar para la versión bidimensional utilizando los nuevos índices  $\alpha$ .

## 4.2. ORDENAMIENTO PROPUESTO

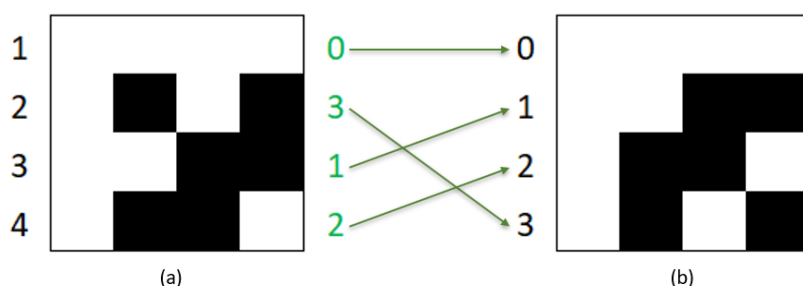
En la técnica de SPI basada en la transformada de Hadamard, se restauran imágenes proyectando todos los vectores base, pero cuando se requiere restaurar una imagen y existen restricciones como el tiempo, por ejemplo, en la restauración de video en tiempo real, se deben seleccionar los vectores base

más significativos. Lo que equivale a ordenar las filas de la matriz de Hadamard en orden descendente de relevancia y usar solo un porcentaje de las filas de acuerdo con la clasificación establecida. Para lograrlo se necesita definir un criterio para asignar un valor numérico de relevancia a cada fila de la matriz de Hadamard.

La técnica de ordenamiento propuesta en esta tesis consta de los siguientes dos pasos:

**Paso 1.** En este paso se construye una representación bidimensional de los patrones básicos de Hadamard  $2^n$  utilizando un ordenamiento inicial de Hadamard de dimensión  $2^{n/2}$ , la ordenación inicial se obtiene acomodando los patrones base con respecto al cambio de signo en orden ascendente. Esto se basa en el hecho de que al cambiar el orden de los vectores base se obtiene una indexación diferente de los patrones 2D. Se eligió una indexación derivada de la permutación de los vectores unidimensionales de  $V_{[1]}^{(n/2)}$  en orden ascendente según el cambio de signo, también conocido como ordenación de secuencias (Ver Figura 4.2), que es el mejor orden cuando no se conoce la escena de destino.

**Figura 4.2:**  
*Ordenación de secuencias.*



*Nota.* (a) es una matriz natural de Hadamard de orden  $H_4$ , en color verde se muestra cuantos cambios de signo (cambios de blanco a negro de negro a blanco) se dan por vector fila, por ejemplo, en la fila 1 hay 0 cambios de signo, en la fila 2 hay 3 cambios, en la fila 3 se da 1 cambio y en la fila 4 hay 2 cambios. (b) se ordenan las filas conforme al número de cambios de signo en orden ascendente, estos vectores fila coinciden con las hojas del árbol de la figura 4.1.

**Paso 2.** Se realiza un recorrido en zigzag de la representación bidimensional dada en el *Paso 1*, utilizando una indexación específica, el recorrido comienza desde el patrón superior izquierdo al patrón inferior derecho, el recorrido en zigzag permite elegir los patrones con mayor energía o que más contribuyen a la restauración de la imagen. Este recorrido se basa en el hecho de que la distribución de energía se acumula en la esquina superior izquierda de la representación bidimensional de los patrones base (Ma et al., 2019).

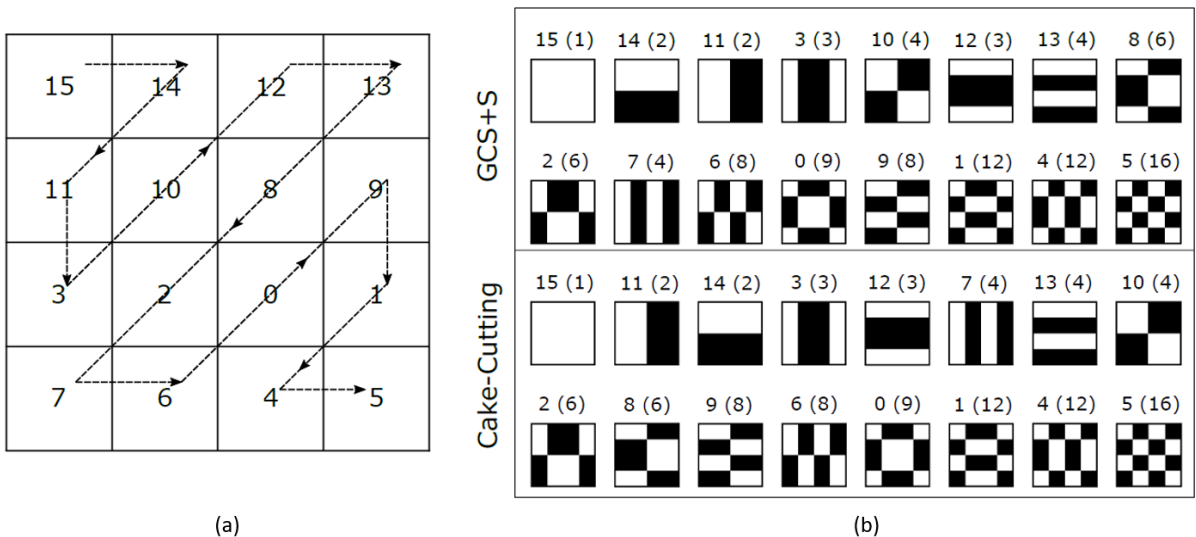
Los vectores de base 2D definidos en la ecuación 4.3 generan una indexación de los patrones o filas de Hadamard. Los vectores fila obtenidos en la Figura 4.2 coinciden con las hojas del árbol de la Figura 4.1  $V_s^{(k)}$  para  $k = 2$ , la concatenación de los signos (+/-) que están encima de las ramas produce la indexación que es una cadena binaria, cuyo valor en decimal se ocupa para hacer el recorrido en zigzag. La Figura 4.1 muestra el índice  $\alpha$  de cada patrón y la Figura 4.3(a) muestra los valores decimales asociados con cada índice  $\alpha$ . Observe que la indexación dada depende del orden de los vectores base unidimensionales usados para construir  $V_{[1]}^{(n/2, n/2)}$ .

La combinación del ordenamiento de secuencias junto con el recorrido en zigzag se denominará técnica GCS+S, ya que el primero coincide con un GCS. La Figura 4.3(b) muestra el recorrido en zigzag con la indexación propuesta y una comparación con la técnica CC. En el caso de la técnica GCS+S, los patrones se listan en el orden de recorrido junto con su índice correspondiente y el número de bloques que contiene. Además, se muestra el ordenamiento obtenido por la técnica CC de la matriz de Hadamard de tamaño  $2^4 \times 2^4$ .

Se debe tener en cuenta que las técnicas GCS+S y CC son similares con respecto al número de bloques, por ejemplo, si se comparan los dos ordenamientos, el número de bloques coincide exactamente en 9 posiciones y son diferentes en 7 y la diferencia en el número de bloques es máximo 2.

**Figura 4.3:**

Se presenta un ejemplo de la indexación y el recorrido en zigzag.



Nota. (a) es la indexación de los patrones 2D de los vectores base en  $V_{[1]}^{(n/2, n/2)}$  como se construye en la Figura 4.1 las flechas indican el orden transversal de los patrones 2D o escaneo en zigzag. (b) Es la clasificación de patrones usando la técnica GCS+S y la técnica CC. El número sobre cada patrón se refiere a su índice y el número entre paréntesis es el número de bloques que contiene el patrón.

---

## Resultados y discusión

En este apartado, se presentan los resultados simulados y experimentales de la técnica GCS+S y la técnica CC, ambas para la restauración de dos imágenes, para la parte experimental se utilizó la configuración de detección estructurada mostrada en la Figura 5.1. También se realiza un análisis de complejidad algorítmica de las técnicas y se presenta una discusión de la comparación entre los resultados de ambas técnicas.

### 5.1. MATERIALES Y CONFIGURACIÓN

**Para realizar las simulaciones** los cálculos se ejecutaron en una computadora de escritorio, con un procesador Intel CPU i5-2500 de 64 bits a 3,30 GHz, con 4 núcleos y 16 GB de memoria RAM. Utilizando un lenguaje de programación Matlab R2017b sobre un sistema operativo Windows 10 Pro, versión 21H2.

Las imágenes de prueba se seleccionaron de dos conjuntos de datos: (1) la base de datos de imágenes USC-SIPI que es una colección de imágenes digitalizadas de la Universidad del Sur de California (USC-SIPI, 1981), que se utilizó como prueba de concepto de la técnica propuesta para mostrar los resultados de la restauración de imágenes y (2) la base de datos COCO (Objetos Comunes en Contexto, por sus siglas en inglés) que proporciona información

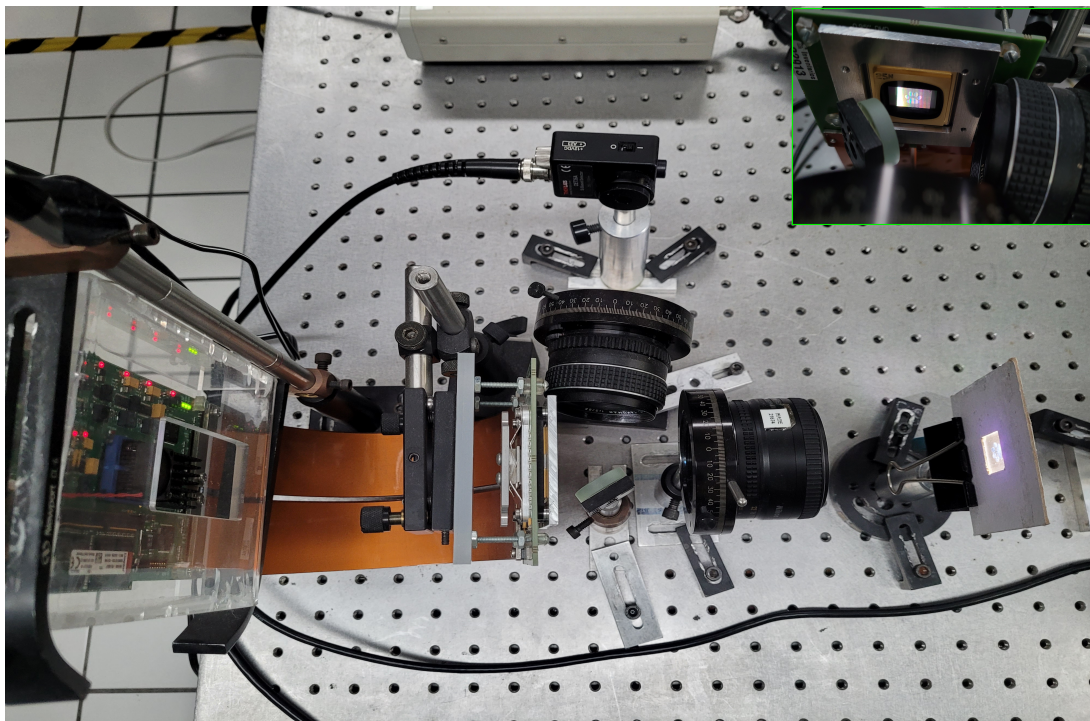
de detección de objetos, además de 85783 imágenes con más de 80 categorías de objetos de escenas naturales, que incluyen 250000 imágenes de personas (Lin et al., 2014). Todas las imágenes utilizadas se convirtieron a escala de grises cuando fue necesario y se normalizaron en el rango de 0 a 1. El código fuente del algoritmo GCS+S implementado se puede observar en el apéndice A.1.

**Para realizar los experimentos** se utilizó una configuración de detección estructurada como la que se muestra la Figura 5.1 que se nos permitió ocupar en el Laboratorio de Óptica del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), en la que un diodo LED blanco acoplado a una fibra multimodo funciona como fuente de iluminación y una lente de cámara para obtener una imagen del objeto en el plano de un DMD marca VIALUX, Modelo V-9501, con resolución  $1920 \times 1080$  píxeles. Una lente colectora que envía la luz a un fotodiodo de la marca Thorlabs, DET36A Si *Biased Detector* situado a su distancia focal. Las señales se digitalizaron mediante un convertidor de *National Instruments* modelo NI USB-6003 conectado a una computadora. Los patrones generados se cargaron en el DMD y se visualizaron a una velocidad de 1KHz. Todos los experimentos se realizaron con iluminación ambiental.

## 5.2. RESULTADOS SIMULADOS

Un paso importante en la construcción de la representación 2D de la matriz de Hadamard es la selección de la permutación utilizada para la indexación de los vectores base. Por ejemplo, para restaurar una imagen de tamaño  $64 \times 64$  píxeles, se requiere construir el conjunto  $V_{[1]}^{(6,6)}$  que es equivalente a la matriz Hadamard  $H_{2^{12}}$ . El número de elementos es  $2^{12}$ . La permutación  $\sigma$  es un mapeo uno a uno de los enteros  $\{1, \dots, 2^6\}$  o equivalente de las filas de índice de la matriz de Hadamard  $H_{2^6}$ . Enseguida, se comparan varios ordenamientos conocidos de la matriz de Hadamard  $H_{2^6}$ . Después de elegir una permutación, el orden de los vectores base en  $V_{[1]}^{(6,6)}$  se obtiene con un recorrido en zigzag.

**Figura 5.1:**  
*Vista aérea del sistema de detección estructurada SPI.*



*Nota.* En el recuadro verde se muestra una vista frontal del DMD. Fuente: Imagen obtenida en el Laboratorio de Óptica del INAOE.

### 5.2.1. RESTAURACIÓN CON DIFERENTES TASAS DE MUESTREO

En la Figura 5.2 se presentan los resultados de la restauración de imágenes de tamaño  $64 \times 64$  píxeles utilizando una imagen de la base de datos USC-SIPI para varias permutaciones.

En la Figura 5.2 (arriba) se presentan los resultados de la restauración de la imagen con tasas de muestreo del 10% al 50% junto con el valor de SSIM calculado con respecto a la imagen original. Se puede observar que los ordenamientos de GCS+S y Walsh-Paley muestran mejores resultados de restauración visual.

Según Wang et al. (2004) una imagen restaurada se considera buena si el RMSE es inferior a 0.1 y el valor de SSIM es superior a 0.6. Por lo que se puede

ver que la técnica GCS+S obtiene un buen resultado de restauración a partir de una frecuencia de muestreo del 10%.

En la Figura 5.2 (abajo) se muestra el RMSE de la restauración de una imagen con respecto a la tasa de muestreo del 10% al 100% en pasos de 10%, la tasa de muestreo se refiere a un porcentaje de filas de la matriz de Hadamard tomadas desde la primera fila hasta un número determinado de filas. La restauración de la imagen se obtuvo utilizando la ecuación 2.6 y el método diferencial dado en la ecuación 2.7, donde los valores de medición correspondientes a los patrones no proyectados se igualaron a cero. Se utilizó la permutación de las matrices de Hadamard: Cal-Sal, ordenamiento natural, Walsh-Paley, una permutación aleatoria y GCS+S.

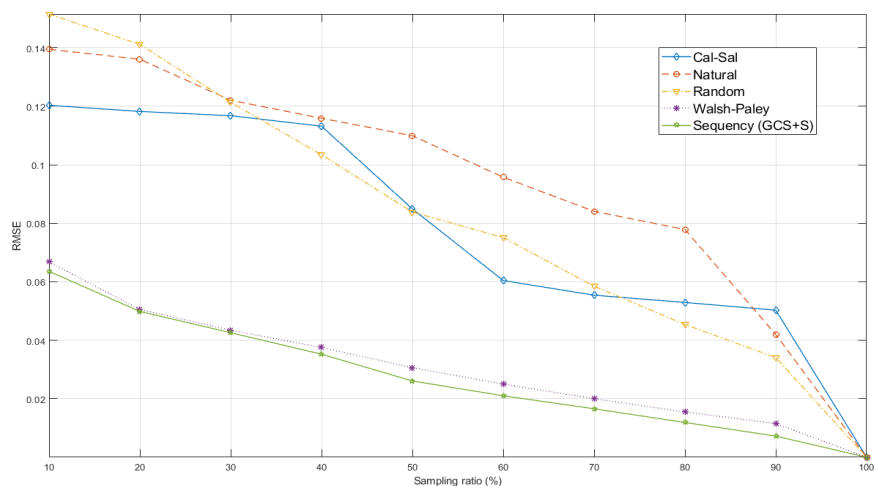
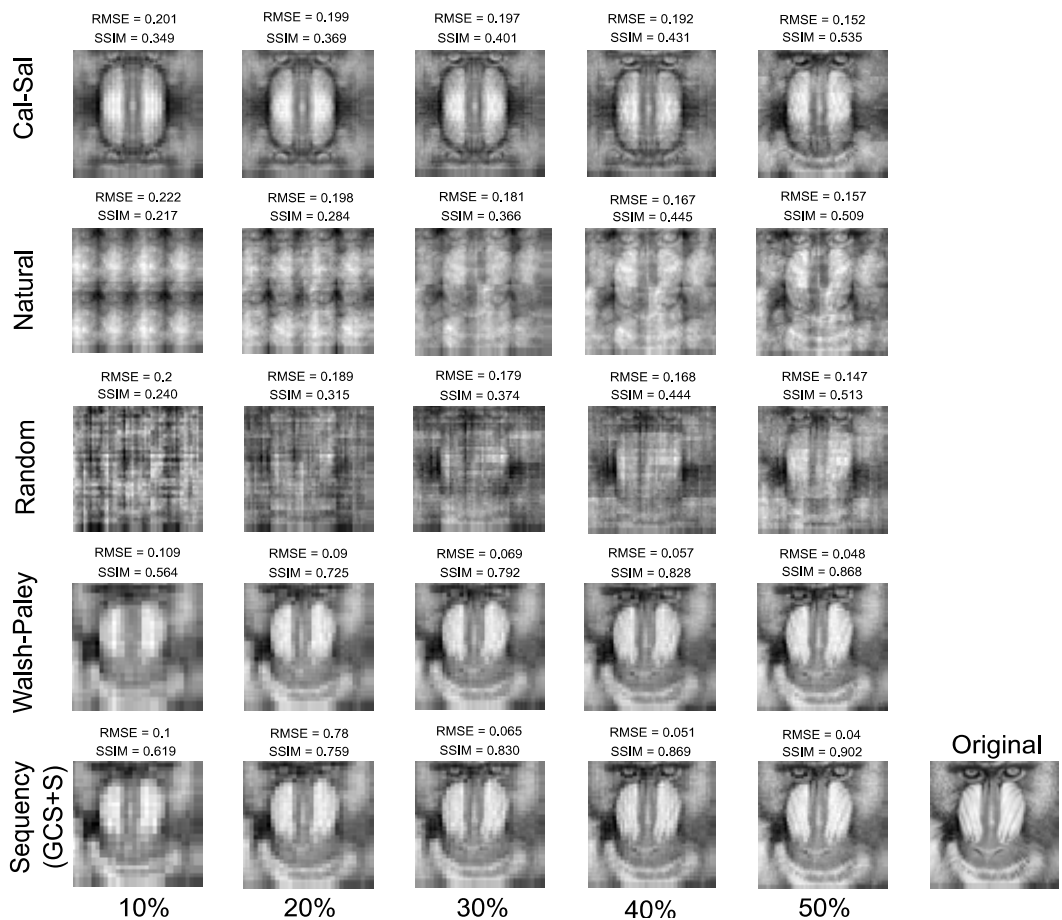
Aunque en la Figura 5.2 (abajo) solo se muestra un ejemplo de rendimiento. También se realizaron pruebas con 39 imágenes de la base de datos USC-SIPI y resultó que en la mayoría de los casos GCS+S obtiene el mejor rendimiento, seguido por el orden de Walsh-Paley, mientras que las otras tres matrices obtienen el peor rendimiento.

### 5.2.2. COMPARACIÓN DE GCS+S, CC, WALSH-PALEY Y SEQUENCY

Se realizó una comparación de la técnica de ordenamiento propuesta GCS+S con la técnica CC, Walsh-Paley y Sequency. Las matrices de Walsh-Paley y Sequency se construyeron utilizando la definición descrita por (Agaian et al., 2011). Estas dos últimas matrices se consideran una referencia de rendimiento y son diferentes de las matrices construidas utilizando el recorrido en zigzag. Por otro lado, se eligió la técnica CC como uno de los mejores algoritmos que ordenan los patrones o filas de la matriz de Hadamard y que utilizan el menor número de ellos para restaurar una imagen.

En la Figura 5.3 se presentan los resultados de la comparación utilizando imágenes de la base de datos COCO reescaladas a  $64 \times 64$  píxeles. En la Figura

**Figura 5.2:**  
*Restauración utilizando diferentes tasas de muestreo.*



*Nota.* Arriba: Se muestra una comparación visual de la restauración de la imagen con tasas de muestreo del 10% al 50%, junto con el valor SSIM con respecto a la imagen original. Abajo: se muestra el RMSE con respecto a tasas de muestreo de 10% a 100% en pasos de 10%.

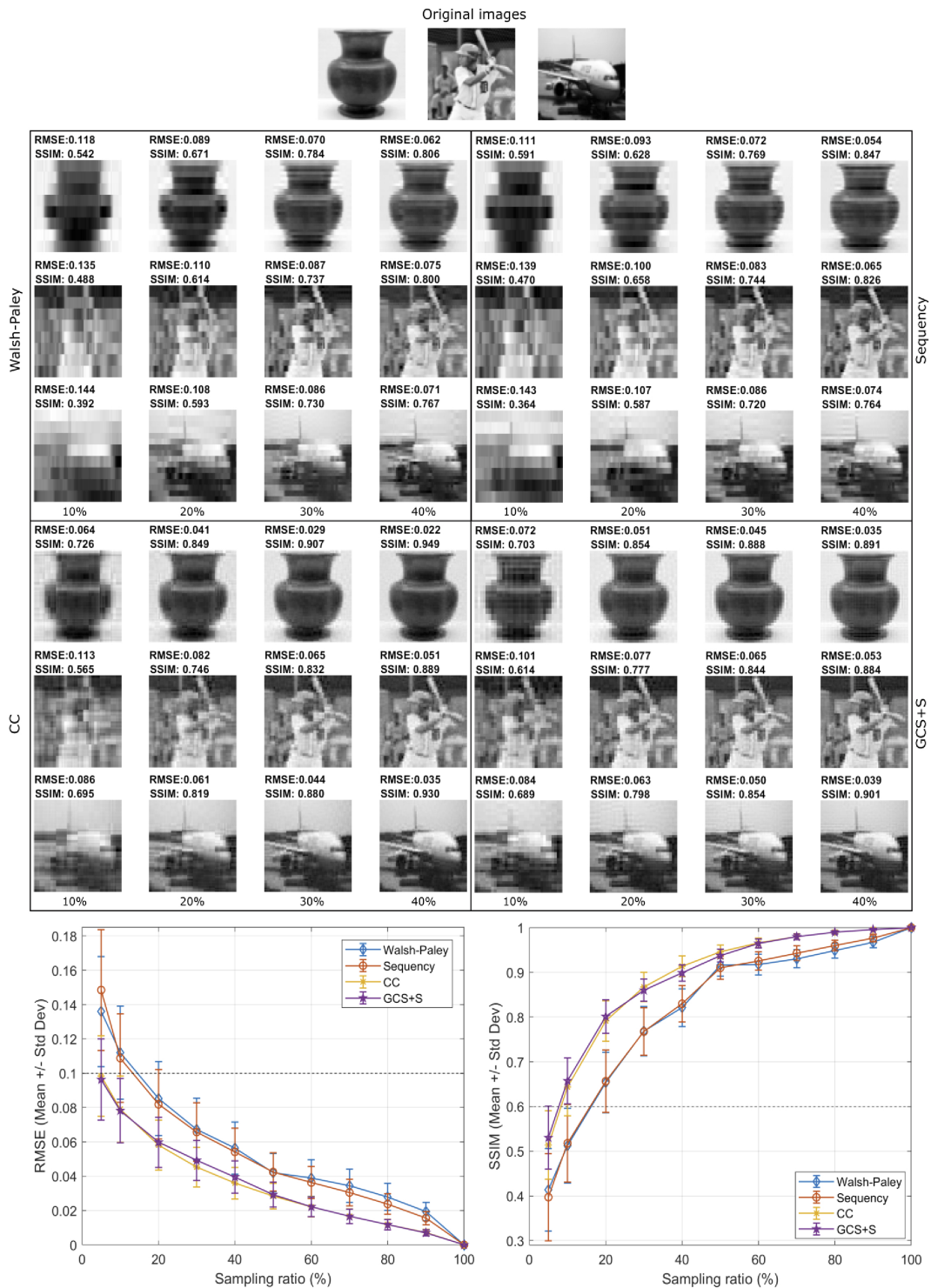
5.3 (arriba) se muestra el resultado de la restauración de tres imágenes con proporciones de muestreo del 10% al 40% en pasos de 10%. Para cada técnica o matriz se muestran las imágenes restauradas junto con sus valores RMSE y SSIM. Se puede observar que los ordenamientos de Walsh-Paley y Secuency obtienen el peor desempeño, en una tasa de muestreo del 20%, las imágenes restauradas tienen mala calidad visual con valores de SSIM por debajo de 0.5. Por otro lado, la técnica GCS+S muestra mejores valores de similitud que se pueden ver a tasas de muestreo bajas.

Para demostrar que los resultados no son un caso particular, en la Figura 5.3 (abajo) se presentan los valores promedio de RMSE y SSIM para un conjunto de 150 imágenes tomadas al azar de la base de datos COCO. Se puede apreciar que los ordenamientos de Walsh-Paley y Sequency reportan grandes valores de error y bajos valores de similitud. Por otro lado, GCS+S tiene mejores valores medios de RMSE a bajas tasas de muestreo del 5%, 10% y 20%. Sin embargo, a la tasa de muestreo del 5%, el valor SSIM de la técnica GCS+S no alcanza el límite inferior de 0,6, que se considera una imagen de buena calidad, este límite lo alcanza aproximadamente en el 8%. También, se puede observar en la Figura 5.3 (abajo) que la variación de los valores RMSE y SSIM disminuye a medida que aumenta la tasa de muestreo.

### 5.2.3. RENDIMIENTO BAJO LA INFLUENCIA DEL RUIDO

Un aspecto importante de las técnicas de restauración de imágenes SPI es que deben ser tolerantes a las fuentes de ruido a tasas de muestreo bajas. Enseguida, se analiza el rendimiento de las técnicas de clasificación de Hadamard bajo la influencia de ruido. Las fuentes más comunes de ruido en SPI son la *corriente oscura* causada por el detector y la *luz ambiental*. El primero, se puede reducir significativamente utilizando el método diferencial SPI, es decir, descomponiendo cada patrón de Hadamard en valores de entrada positivos y negativos como patrones binarios (Z. Zhang et al., 2017b). El segundo, es más difícil de modelar dada la complejidad de la dispersión de la luz ambiental.

**Figura 5.3:**  
Comparación de las técnicas GCS+S, CC, Walsh-Paley y Sequency.



*Nota.* (Arriba) se presentan los resultados de restauración de imágenes para tres imágenes con tasas de muestreo del 10% al 40% en pasos de 10%. Se muestran los valores RMSE y SSIM para cada imagen restaurada. (Abajo) se muestra una gráfica de los valores medios de RMSE y SSIM con barras de error verticales de igual longitud para 150 imágenes elegidas al azar de la base de datos COCO.

La Figura 5.4 muestra los resultados de la restauración de imágenes usando la base de datos COCO reescaladas a  $64 \times 64$  píxeles, en las que las mediciones fueron corrompidas por ruido gaussiano blanco a una SNR = 50dB, se consideró una cantidad fija de ruido ya que el comportamiento de los métodos de clasificación fue similar.

En la Figura 5.4 (arriba) se muestra la restauración de tres imágenes usando los ordenamientos GCS+S, CC, Walsh-Paley y Sequency. Los ordenamientos de Walsh-Paley y Sequency presentan los peores resultados y en las técnicas GCS+S y CC los valores RMSE y SSIM son aceptables y tienen buena restauración de imagen. Sin embargo, GCS+S obtiene mejores resultados a tasas de muestreo del 10% y 20%.

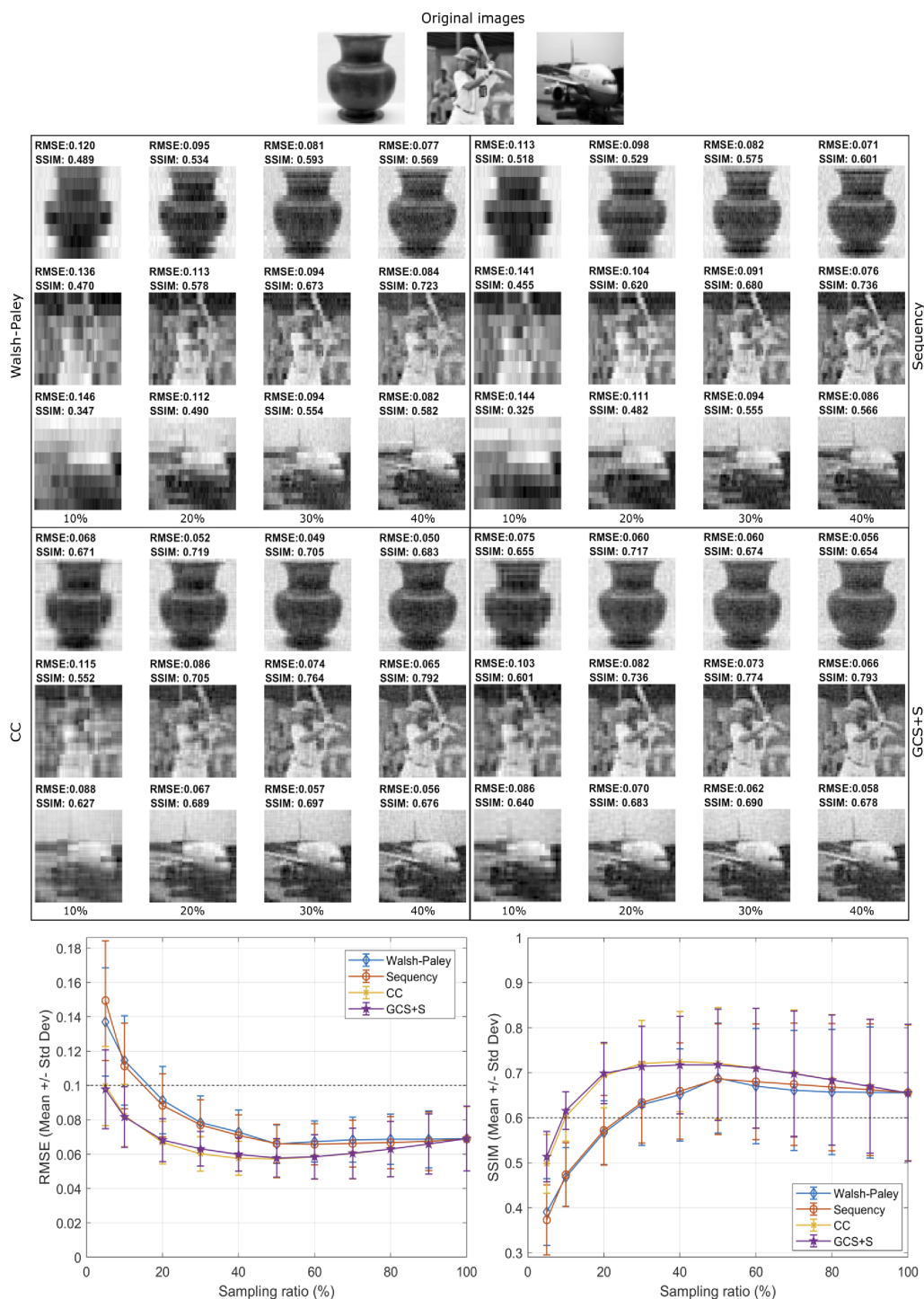
De manera similar, la Figura 5.4 (abajo) muestra los valores medios con barras de error de longitud dada como la desviación estándar, para varias tasas de muestreo. Se puede ver que los valores RMSE y SSIM no convergen a cero y uno, respectivamente, como en el caso de mediciones ideales presentadas en la Figura 5.3 (abajo). Sin embargo, las técnicas GCS+S y CC obtienen resultados de restauración aceptables a tasas de muestreo superiores al 8%. Se debe tener en cuenta que el valor SSIM tiene una variación mayor que el valor RMSE, lo que significa que es más difícil obtener una buena calidad de imagen.

#### 5.2.4. RENDIMIENTO BAJO ESCASEZ DE LA IMAGEN

Uno de los factores importantes en SPI es la escasez de la escena o imagen a restaurar. En particular, el método CS puede reducir el número de mediciones aprovechando la escasez de la imagen. En general, la dispersión disminuye a medida que aumenta el tamaño de la imagen.

Para ver la influencia de la escasez de la imagen a restaurar, la Figura 5.5 muestra los valores RMSE y SSIM para imágenes de tamaño  $128 \times 128$  píxeles usando la base de datos COCO. Las Figuras 5.5(a) y 5.5(b) muestran

**Figura 5.4:** Comparación de las técnicas GCS+S, CC, Walsh-Paley y Sequency, bajo mediciones corrompidas por ruido Gaussiano blanco con una SNR=50dB.



*Nota.* (Arriba) los resultados de restauración de imagen para tres imágenes con tasas de muestreo de 10% a 40% en pasos de 10%. Para cada imagen restaurada, se muestran los valores RMSE y SSIM. (Abajo) las gráficas de los valores medios de RMSE y SSIM con barras de error verticales de igual longitud para 150 imágenes elegidas al azar de la base de datos COCO.

los valores RMSE y SSIM bajo medidas ideales usando los ordenamientos CC, GCS+S, Walsh-Paley y Sequency.

De la Figura 5.3 (abajo) y las Figuras 5.5(a) y 5.5(b) se puede ver que los valores RMSE y SSIM mejoran a medida que aumenta la resolución de la imagen. De manera similar, las Figuras 5.5(c) y 5.5(d) muestran los valores RMSE y SSIM bajo mediciones corruptas por ruido Gaussiano blanco con una SNR=50dB usando los ordenamientos CC, GCS+S, Walsh-Paley y Sequency.

En el caso anterior, se puede observar que los valores de RMSE y SSIM empeoran al aumentar la resolución de la imagen a una SNR fija. Este último comportamiento ha sido estudiado dependiendo de la fuente de ruido y es una de las principales limitaciones en SPI según (Sun et al., 2016). Los resultados de la simulación proporcionados en esta sección muestran que la técnica de ordenamiento GCS+S tiene un rendimiento similar la técnica CC cuando se restauran imágenes de tamaño  $64 \times 64$  y  $128 \times 128$  píxeles.

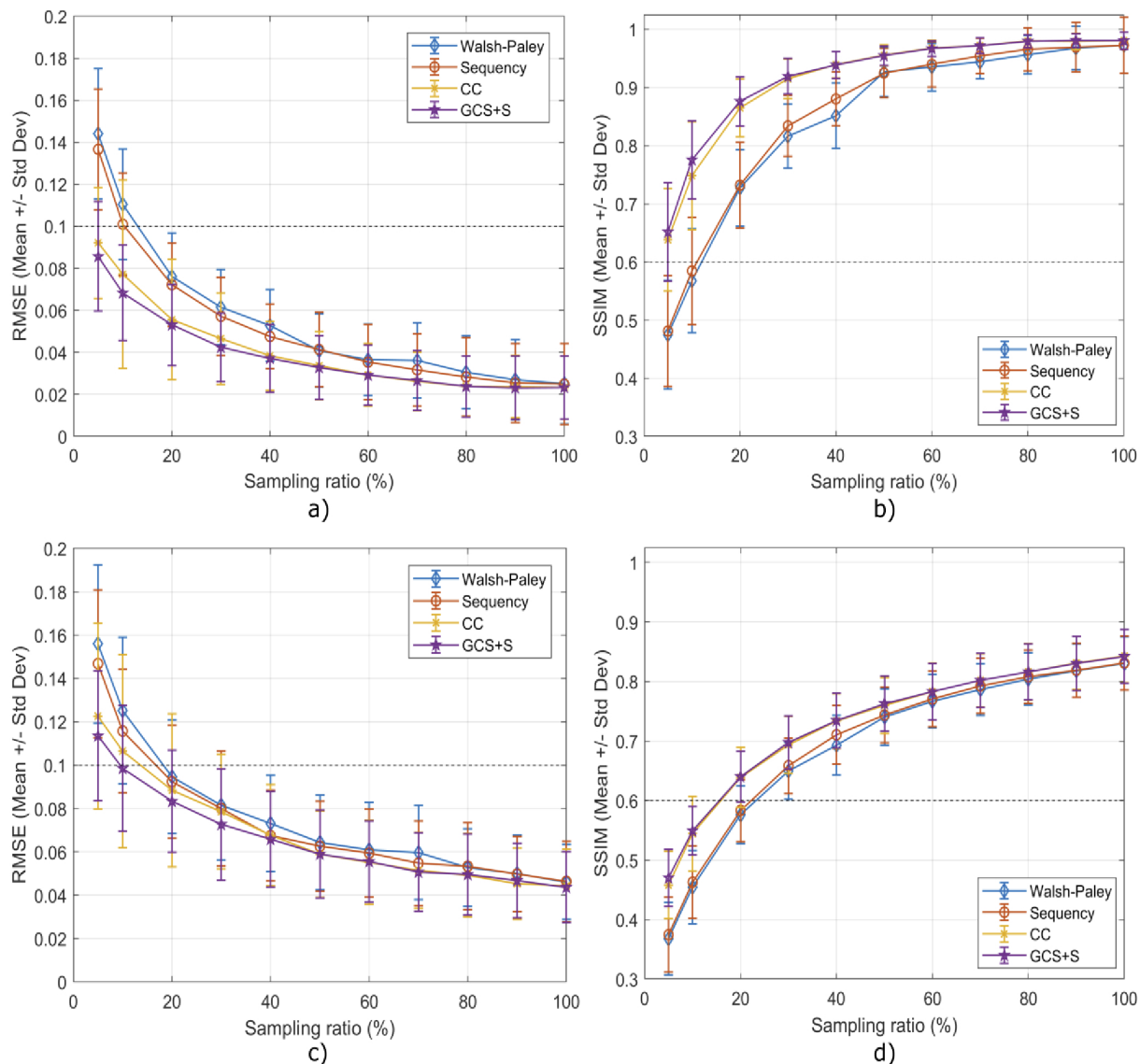
### 5.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Como primer experimento se restauró una imagen de  $128 \times 128$  píxeles de resolución, impresa en acetato. En la Figura 5.6 se puede apreciar que las técnicas CC y GCS+S obtienen imágenes más nítidas a partir de una frecuencia de muestreo del 10%. Para el caso de los ordenamientos Sequency y Walsh-Paley, se observan imágenes borrosas con tasas de muestreo del 10% y del 20%. Se puede decir que los resultados de este experimento son coherentes con las simulaciones de la sección 5.2.

Como segundo experimento se realizó una comparación cuantitativa utilizando las métricas RMSE y SSIM para la misma imagen. Para cada técnica, el RMSE y el SSIM se calcularon tomando como base la imagen restaurada con una tasa de muestreo del 100%. Como se puede ver en la Tabla 5.1, la mayoría de los valores de RMSE para GCS+S y CC son inferiores al límite

**Figura 5.5:**

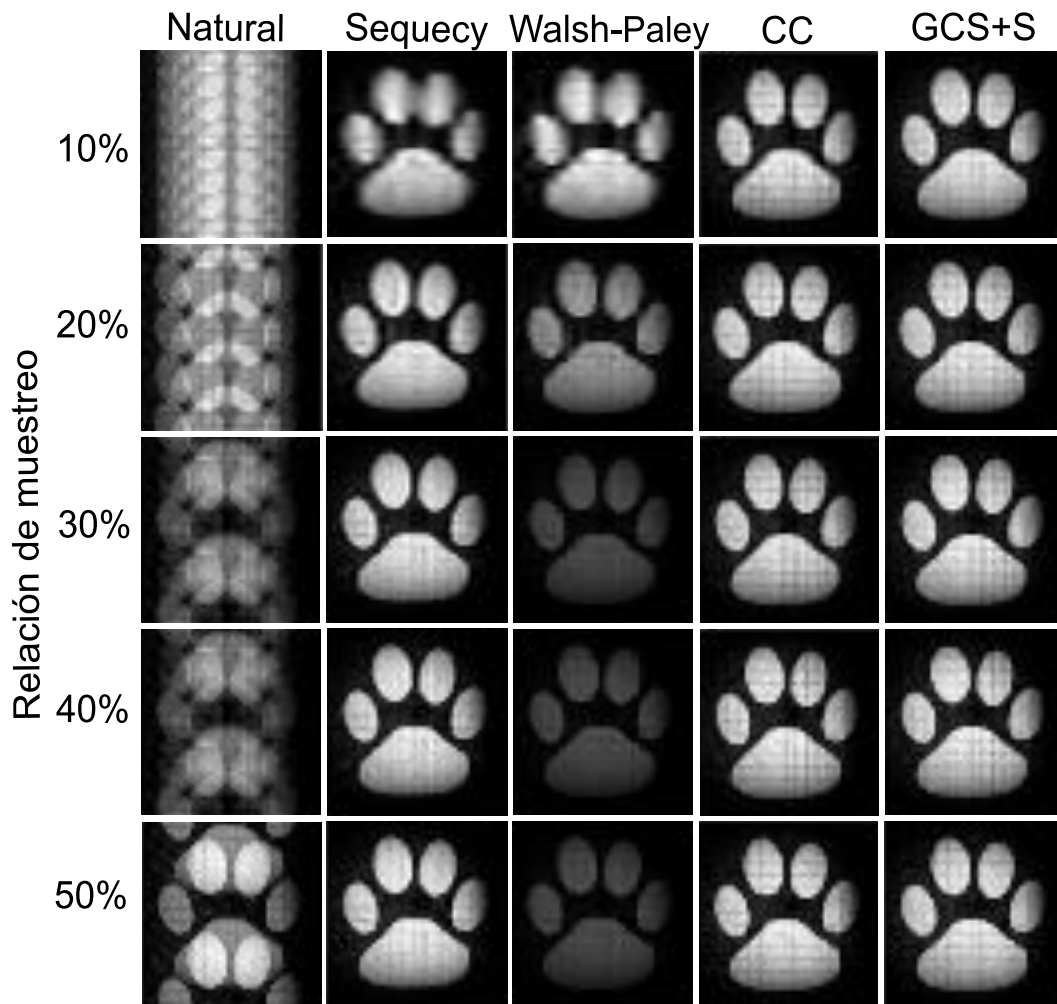
Comparación de las técnicas GCS+S, CC y los ordenamientos de Walsh-Paley y Sequency bajo escasez de la imagen.



*Nota.* Las imágenes a) y b) son gráficas de los valores medios de RMSE y SSIM con barras de error verticales de igual longitud para 150 imágenes de tamaño  $128 \times 128$  píxeles elegidos al azar de la base de datos COCO. Las imágenes c) y d) son gráficas de los valores medios de RMSE y SSIM como en a) y b) bajo mediciones corruptas por ruido gaussiano blanco con una SNR = 50dB.

**Figura 5.6:**

Comparación de la restauración de imágenes con una resolución de  $128 \times 128$  píxeles.



*Nota.* Se utiliza el algoritmo TVLA3 para tasas de muestreo del 10% al 50%. Fuente: (Datos obtenidos en el laboratorio de óptica del INAOE).

inferior de 0.1 y los valores de SSIM son superiores al límite superior de 0.6. También se puede observar una mejora en los valores SSIM de la técnica GCS+S en comparación con la técnica CC. Esto último coincide con los resultados experimentales mostrados en la Figura 5.6.

**Tabla 5.1:**

Comparación cuantitativa utilizando las métricas RMSE y SSIM.

		Relación de muestreo				
		Técnica	10 %	20 %	30 %	40 %
RMSE	Natural	0.293	0.248	0.172	0.162	0.159
	Sequency	0.116	0.081	0.061	0.039	0.045
	Walsh-Paley	0.114	0.082	0.069	0.056	0.044
	CC	0.043	0.030	0.028	0.025	0.014
	GCS+S	0.059	0.036	0.028	0.028	0.015
SSIM	Natural	0.409	0.470	0.532	0.602	0.644
	Sequency	0.641	0.788	0.856	0.911	0.927
	Walsh-Paley	0.640	0.779	0.839	0.884	0.930
	CC	0.825	0.880	0.920	0.939	0.957
	GCS+S	0.808	0.890	0.920	0.932	0.953

*Nota.* Los datos fueron obtenidos en el laboratorio de óptica del INAOE.

## 5.4. ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD ALGORÍTMICA

En seguida se presenta análisis algorítmico de la técnica GCS+S y de la técnica Cake-Cutting, para después compararlas en busca de la técnica que presente una mejor complejidad computacional.

### 5.4.1. ANÁLISIS ALGORÍTMICO DE LA TÉCNICA GCS+S

En el algoritmo 5.1, se presentan los pasos de la técnica GCS+S que tiene como entrada la dimensión  $n$  y devuelve una matriz de Hadamard  $H_{2^{2n}}$  utilizada para restaurar imágenes de tamaño  $2^n \times 2^n$  píxeles. Para conocer la complejidad del Algoritmo 5.1 se debe determinar cuál de sus pasos tiene mayor complejidad en términos del parámetro principal  $n$ ; este tipo de análisis corresponde al peor de los casos o también conocido como la notación asintótica de la ‘O’ grande (Cormen et al., 2009).

En el *paso 1*, la base de Hadamard  $V_{[1]}^{(n)}$  se puede construir en  $\log_2 N$  iteraciones siguiendo las Ecuaciones 4.1 y 4.2 ya que el número de vectores

crece exponencialmente al concatenar vectores de menor dimensión. Por definición, el conjunto  $V_{[1]}^{(n)}$  tiene  $N$  vectores con  $N$  entradas cada uno; por lo tanto, el *paso 2* se puede realizar en  $N + N \log N$  iteraciones, que es la suma de las complejidades de calcular el cambio de signo de cada vector y ordenar un vector de tamaño  $N$ . En el *paso 3*, la construcción del conjunto base bidimensional  $V_{[1]}^{(n,n)}$  se puede realizar en  $N^2$  iteraciones siguiendo la ecuación 4.3. Por otro lado, el recorrido en zigzag se puede realizar en un máximo de  $N^2$  iteraciones, por lo que, los *pasos 4 y 5* tienen una complejidad de  $2N^2$ . En consecuencia, el mayor número de iteraciones de los pasos 1 a 5 es  $N^2$ , dando como resultado que el algoritmo GCS+S tiene una complejidad de  $O(N^2)$ .

---

### Algoritmo 5.1 Algoritmo GCS+S

---

**Entrada:** Dimensión ( $n$ )

**Salida:** Matriz de Hadamard ordenada  $H$  de tamaño  $2^2 n \times 2^2 n$

- 1: Construir la base de Hadamard  $V_{[1]}^{(n)}$  utilizando las ecuaciones 4.1 y 4.2;
  - 2: Ordenar los vectores base  $V_{[1]}^{(n)}$  en orden ascendente de acuerdo al cambio de signo;
  - 3: Generar la base de Hadamard  $V_{[1]}^{(n,n)}$  con  $V_{[1]}^{(n)}$  del paso anterior usando la ecuación 4.3;
  - 4: Calcular el recorrido en zigzag transversal de  $V_{[1]}^{(n,n)}$ ;
  - 5: Construir  $H_N$  utilizando las filas de  $V_{[1]}^{(n,n)}$  en el orden del recorrido en zigzag;
- 

#### 5.4.2. ANÁLISIS ALGORÍTMICO DE LA TÉCNICA CAKE-CUTTING

En los algoritmos 5.2 y 5.3 se muestran los pasos de la técnica CC que tiene la misma entrada y salida que el algoritmo 5.1. El *paso 1* requiere solo un tiempo constante para realizar una asignación y el *paso 2* se puede realizar en  $\log_2 N$  iteraciones siguiendo la ecuación 2.3. En los pasos 3 al 19, cada fila de la matriz de Hadamard se transforma en un patrón de tamaño  $2^n \times 2^n$  y se cuenta el número de bloques que contiene, ya sean negros o blancos, un bloque negro o blanco es una región de celdas adyacentes en un patrón con valores iguales a  $-1$  y  $1$  respectivamente. El proceso de contar el número de bloques en un patrón es equivalente a un algoritmo de relleno por difusión (del inglés, floodfill) (Foley et al., 1996) que se utiliza para determinar un área delimitada conectada a un píxel inicial con un atributo dado en una matriz multidimensional. En los pasos 5 a

17, se describe una versión modificada del algoritmo de relleno de inundación: se selecciona un píxel inicial e insertan sus píxeles adyacentes en una estructura de datos de pila, luego itera hasta que la pila no está vacía, repitiendo el mismo proceso con los píxeles en la pila.

---

### Algoritmo 5.2 Algoritmo Cake-Cutting

---

**Entrada:** Dimensión ( $n$ )

**Salida:** Matriz de Hadamard ordenada  $H$  de tamaño  $2^2n \times 2^2n$

- 1: Sea  $N = 2^n$  la dimensión de la entrada;
  - 2: Construir la matriz de Walsh-Hadamard  $H_{N^2}$  usando la ecuación 2.3;
  - 3: **para** cada fila  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, N^2$  de  $H_{N^2}$  **hacer**
  - 4:     Convertir  $p_k$  en una matriz bidimensional de tamaño  $N \times N$ ;
  - 5:     Contar el número de bloques en  $p_k$ ;
  - 6:     Sea  $t = 0$  el número de bloques;
  - 7:     **repetir**
  - 8:         Seleccionar un píxel inicial  $x$  en  $p_k$ ;
  - 9:         Marcar el píxel  $x$  como visitado;
  - 10:        Inicializar una pila  $S$ ;
  - 11:        Actualizar lista adjunta  $(S, x)$ ;
  - 12:         $t = t + 1$ ;
  - 13:        **mientras**  $S$  no está vacía **hacer**
  - 14:            Obtener el siguiente píxel  $y$  de la pila  $S$ ;
  - 15:            Actualizar lista adjunta  $(S, y)$ ;
  - 16:        **fin mientras**
  - 17:     **hasta que** todos los píxeles han sido visitados;
  - 18:     Sea  $T_k = t$  el número de bloques en  $p_k$ ;
  - 19: **fin para**
  - 20: Ordenar  $T$  en orden ascendente;
  - 21: Volver a indexar las filas de  $H_{N^2}$  de acuerdo con la nueva indexación de  $T$ ;
- 

El Algoritmo 5.3 actualiza la pila insertando los píxeles adyacentes con el mismo atributo o color. Se puede ver que el número máximo de iteraciones del algoritmo de relleno por difusión es  $N^2$  y el número total de iteraciones de todas las filas de la matriz de Hadamard es  $N^4$ . Finalmente, en los pasos 20 y 21, se ordena el arreglo unidimensional  $T$  que contiene el número de bloques por patrón y se construye una matriz de Hadamard de acuerdo con la nueva indexación del arreglo  $T$ , respectivamente. Estos dos últimos pasos se pueden realizar en iteraciones como máximo  $N^2 + N^2 \log N^2$ . Así, se puede ver que el flood-fill modificado tiene el mayor número de iteraciones, por lo que el algoritmo Cake-Cutting tiene una complejidad de  $O(N^4)$ .

---

**Algoritmo 5.3** Algoritmo para actualizar la lista adjunta
 

---

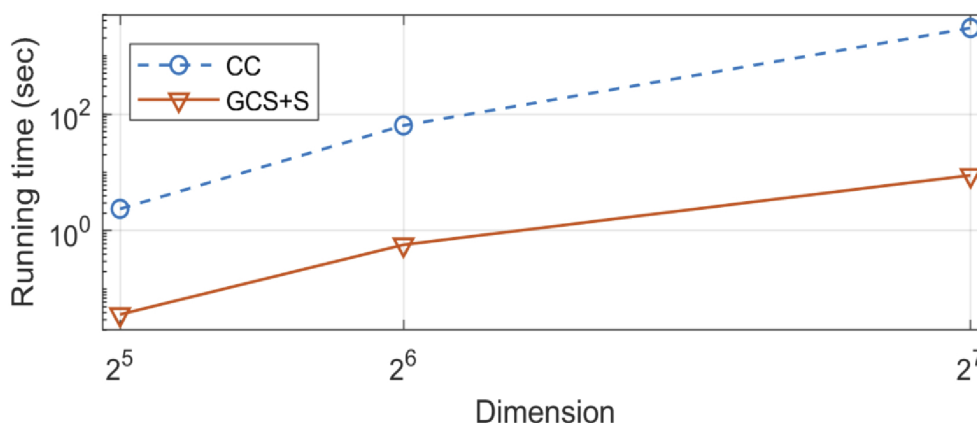
**Entrada:** Pila y píxel ( $S, x$ )**Salida:** Pila  $S$  actualizada

- 1: **para** cada uno de los cuatro píxeles contiguos de  $x$  **hacer**
  - 2:     **si** el píxel no está en  $S$  y no se visitó **entonces**
  - 3:         **si** el píxel tiene el mismo valor que  $x$  **entonces**
  - 4:             Marcar el píxel como visitado;
  - 5:             Insertar el píxel en  $S$ ;
  - 6:         **fin si**
  - 7:     **fin si**
  - 8: **fin para**
- 

En este apartado se ha demostrado que la técnica GCS+S tiene una mejor complejidad computacional que la técnica CC. En la Figura 5.7 se ofrece una comparación del tiempo de ejecución experimental de los algoritmos 5.1 y 5.2. La Figura 5.7 muestra el tiempo de ejecución para tamaños de imagen de  $2^n \times 2^n$  con  $n = 5, 6$  y  $7$ . Cabe aclarar que no se pudo realizar más simulaciones porque el sistema no tiene la capacidad de memoria necesaria para almacenar la matriz de Hadamard para  $n > 7$ . Nótese que, para  $n$  fijo, la complejidad de las técnicas GCS+S y CC es polinomial en  $N$ ; pero en general, la complejidad es exponencial en  $n$ .

**Figura 5.7:**

Tiempo de ejecución experimental de las técnicas de ordenamiento GCS+S y CC.



*Nota.* Los tiempos corresponden a los presentados en los algoritmos 5.1 y 5.2, respectivamente. El eje vertical muestra el tiempo de ejecución en una escala logarítmica y el eje horizontal da la dimensión de entrada  $2^n$  para  $n = 5, 6$  y  $7$ .

---

# Conclusiones y trabajo futuro

## 6.1. CONCLUSIONES

En su artículo Ma et al. (2019) demostró que un escaneo en zigzag de un reordenamiento en cuatro dimensiones de los patrones básicos de Hadamard, permite aprovechar la concentración de energía en la esquina superior izquierda que decrece vertical y horizontalmente. Sin embargo, los autores solo consideran los vectores base en un orden fijo utilizando el ordenamiento natural de la matriz de Hadamard.

En esta tesis, en lugar de utilizar el orden natural de la matriz de Hadamard se encontró que cambiar la indexación de los vectores base permite mejorar el rendimiento de la técnica SPI a tasas de muestreo muy bajas utilizando los vectores más importantes para restaurar la imagen.

Los resultados de las simulaciones, utilizando un conjunto de 150 imágenes elegidas al azar de la base de datos COCO, muestran que la técnica de ordenamiento propuesta produce una mejor calidad de imagen en comparación con algunas técnicas más avanzadas como el CC, incluso bajo mediciones corrompidas por ruido.

---

Según los resultados tanto simulados como experimentales que se obtuvieron en esta investigación, se demuestra que para una imagen de tamaño  $N \times N$  la técnica GCS+S puede construir la matriz ordenada de Hadamard con una complejidad de  $O(N^2)$ , en contraste con la técnica CC cuya complejidad es de  $O(N^4)$  cuando  $N = 2^n$  por lo que la técnica GCS+S presenta una mejor complejidad computacional. Es importante recordar que la construcción de la matriz de Hadamard se realiza previo al proceso de medición y restauración de la imagen y se almacena en la memoria principal del sistema.

Se puede concluir que la técnica de ordenamiento propuesta tiene el potencial necesario para postularse como buen candidato para lograr tasas de muestreo más bajas.

## 6.2. TRABAJO A FUTURO

Como trabajo a futuro se propone:

- Diseñar una técnica que sea capaz de administrar de manera óptima la memoria principal o temporal del sistema.
- Trabajar en la restauración de imágenes mayores a  $128 \times 128$  píxeles de resolución.
- Realizar pruebas en otras longitudes de onda.
- Utilizar técnicas de Aprendizaje Profundo (en inglés, Deep Learning) que, según el estado del arte revisado para esta tesis, han logrado excelentes resultados.

# Bibliografía

- Agaian, S. S., Sarukhanyan, H., Egiazarian, K., & Astola, J. (2011). Hadamard Transforms. <https://doi.org/10.1117/3.890094>
- Aravind, R., Cash, G. L., & Worth, J. P. (1989). On Implementing The Jpeg Still-Picture Compression Algorithm. En W. A. Pearlman (Ed.), *Visual Communications and Image Processing IV* (pp. 799-809, Vol. 1199). SPIE. <https://doi.org/10.1117/12.970090>
- Bai, B., He, Y., Liu, J., Zhou, Y., Zheng, H., Zhang, S., & Xu, Z. (2017). Imaging around corners with single-pixel detector by computational ghost imaging. *Optik*, 147, 136-142. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.08.057>
- Baraniuk, R. G. (2007). Compressive Sensing [lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4), 118-121. <https://doi.org/10.1109/MSP.2007.4286571>
- Becker, S., Bobin, J., & Candès, E. J. (2011). NESTA: A Fast and Accurate First-Order Method for Sparse Recovery. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(1), 1-39. <https://doi.org/10.1137/090756855>
- Ben-Artzi, G., Hel-Or, H., & Hel-Or, Y. (2007). The Gray-Code Filter Kernels. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(3), 382-393. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2007.62>
- Bian, L., Suo, J., Dai, Q., & Chen, F. (2018). Experimental comparison of single-pixel imaging algorithms. *Journal of the Optical Society of America A*, 35(1), 78-87. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.35.000078>
- Bovik, A. C. (2009). *The Essential Guide to Image Processing*. Academic Press.
- Burger, W., & Burge, M. J. (2016). *Digital Image Processing: An Algorithmic Introduction Using Java. Second Edition*. Springer.

- Candes, E. J., & Tao, T. (2006). Near-Optimal Signal Recovery From Random Projections: Universal Encoding Strategies? *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(12), 5406-5425. <https://doi.org/10.1109/TIT.2006.885507>
- Cathey, W. T., Frieden, B. R., Rhodes, W. T., & Rushforth, C. K. (1984). Image gathering and processing for enhanced resolution. *Journal of the Optical Society of America A*, 1(3), 241-250. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.1.000241>
- Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? –Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 1247-1250. <https://doi.org/10.5194/gmd-7-1247-2014>
- Chervyakov, N., Lyakhov, P., & Nagornov, N. (2018). Quantization Noise of Multilevel Discrete Wavelet Transform Filters in Image Processing. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 54(6), 608-616. <https://doi.org/10.3103/S8756699018060092>
- Choi, H., & Jeong, J. (2020). Despeckling algorithm for reducing speckle noise in images generated from active sensors. *Electronics Letters*, 56(17), 876-879. <https://doi.org/10.1049/el.2020.0614>
- Cisneros-Martínez, J., Ramos-García, R., & Chiu-Zárate, R. (2019). FORMACIÓN DE IMÁGENES CON UN SOLO PIXEL [Tesis de maestría]. <http://inaoe.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1009/1822>
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms. 3rd Edition. *New York*.
- Duarte, M. F., Davenport, M. A., Takhar, D., Laska, J. N., Sun, T., Kelly, K. F., & Baraniuk, R. G. (2008). Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2), 83-91. <https://doi.org/10.1109/MSP.2007.914730>
- Durán, V., Clemente, P., Fernández-Alonso, M., Tajahuerce, E., & Lancis, J. (2012). Single-pixel polarimetric imaging. *Optics Letters*, 37(5), 824-826. <https://doi.org/10.1364/OL.37.000824>

- Edgar, M. P., Gibson, G. M., & Padgett, M. J. (2019). Principles and prospects for single-pixel imaging. *Nature Photonics*, 13(1), 13-20. <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0300-7>
- Espectro. (2018). El Espectro Electromagnético. Consultado el 30 de octubre de 2021, desde <https://espectro.org.br/es/content/el-espectro-eletromagn%C3%A9tico>
- Foley, J. D., Van, F. D., Van Dam, A., Feiner, S. K., Hughes, J. F., & Hughes, J. (1996). *Computer graphics: principles and practice* (Vol. 12110). Addison-Wesley Professional.
- Gibson, G. M., Johnson, S. D., & Padgett, M. J. (2020). Single-pixel imaging 12 years on: a review. *Optics Express*, 28(19), 28190-28208. <https://doi.org/10.1364/OE.403195>
- Gibson, G. M., Sun, B., Edgar, M. P., Phillips, D. B., Hempler, N., Maker, G. T., Malcolm, G. P., & Padgett, M. J. (2017). Real-time imaging of methane gas leaks using a single-pixel camera. *Optics Express*, 25(4), 2998-3005. <https://doi.org/10.1364/OE.25.002998>
- Hahamovich, E., Monin, S., Hazan, Y., & Rosenthal, A. (2021). A new spin on single-pixel imaging: spatial light modulation at megahertz switch rates via cyclic Hadamard masks. *Nature Communications*. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-332018/v1>
- Higham, C. F., Murray-Smith, R., Padgett, M. J., & Edgar, M. P. (2018). Deep learning for real-time single-pixel video. *Scientific reports*, 8(1), 1-9. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-20521-y>
- Instruments, T. (2008). The Digital Micromirror Device a Historic Mechanical Engineering Landmark. Consultado el 19 de octubre de 2021, desde [https://www.asme.org/wwwasmeorg/media/resourcefiles/aboutasme/who%20we%20are/engineering%20history/landmarks/dmd\\_brochure.pdf](https://www.asme.org/wwwasmeorg/media/resourcefiles/aboutasme/who%20we%20are/engineering%20history/landmarks/dmd_brochure.pdf)
- Jiao, S., Feng, J., Gao, Y., Lei, T., & Yuan, X. (2020). Visual cryptography in single-pixel imaging. *Optics Express*, 28(5), 7301-7313. <https://doi.org/10.1364/OE.383240>

- Jin, X., Xu, Z., & Hirakawa, K. (2014). Noise Parameter Estimation for Poisson Corrupted Images Using Variance Stabilization Transforms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(3), 1329-1339. <https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2300813>
- Joany, R., & Logashanmugam, E. (2018). Design and analysis of single pixel imaging on magnetic resonance imaging. *Journal of Medical Imaging and Health Informatics*, 8(3), 596-601. <https://doi.org/10.1166/jmih.2018.2338>
- Karpinsky, N. L., Hoke, M., Chen, V., & Zhang, S. (2014). High-resolution, real-time three-dimensional shape measurement on graphics processing unit. *Optical Engineering*, 53(2), 024105. <https://doi.org/10.1117/1.OE.53.2.024105>
- Kublitski, J., Hofacker, A., Boroujeni, B. K., Benduhn, J., Nikolis, V. C., Kaiser, C., Spoltore, D., Kleemann, H., Fischer, A., Ellinger, F., et al. (2021). Reverse dark current in organic photodetectors and the major role of traps as source of noise. *Nature Communications*, 12(1), 1-9. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-20856-z>
- Lee, B. (2013). DMD 101: Introduction to Digital Micromirror Device (DMD) technology. *Texas Instruments*. <http://www.ti.com/lit/pdf/dlpa008>
- Li, C., Yin, W., Jiang, H., & Zhang, Y. (2013). An efficient augmented Lagrangian method with applications to total variation minimization. *Computational Optimization and Applications*, 56(3), 507-530. <https://doi.org/10.1007/s10589-013-9576-1>
- Li, Suo, J., Hu, X., Deng, C., Fan, J., & Dai, Q. (2017). Efficient single-pixel multispectral imaging via non-mechanical spatio-spectral modulation. *Scientific Reports*, 7(1), 1-7. <https://doi.org/10.1038/srep41435>
- Lin, T.-Y., Maire, M., Belongie, S., Hays, J., Perona, P., Ramanan, D., Dollár, P., & Zitnick, C. L. (2014). Microsoft COCO: Common Objects in Context. *Computer Vision – ECCV 2014*, 740-755. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-10602-1\\_48](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10602-1_48)
- Liu, B.-L., Yang, Z.-H., Liu, X., & Wu, L.-A. (2017). Coloured computational imaging with single-pixel detectors based on a 2D discrete cosine

- transform. *Journal of Modern Optics*, 64(3), 259-264. <https://doi.org/10.1080/09500340.2016.1229507>
- López-García, M., García-Arellano, A., & Cruz-Santos, W. (2020). A parallel path-following phase unwrapping algorithm based on a top-down breadth-first search approach. *Optics and Lasers in Engineering*, 124, 105827. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105827>
- Lu, T., Qiu, Z., Zhang, Z., & Zhong, J. (2020). Comprehensive comparison of single-pixel imaging methods. *Optics and Lasers in Engineering*, 134, 106301. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106301>
- Ma, H., Sang, A., Zhou, C., An, X., & Song, L. (2019). A zigzag scanning ordering of four-dimensional Walsh basis for single-pixel imaging. *Optics Communications*, 443, 69-75. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2019.02.041>
- Mait, J. N., Athale, R., & van der Gracht, J. (2003). Evolutionary paths in imaging and recent trends. *Optics Express*, 11(18), 2093-2101. <https://doi.org/10.1364/OE.11.002093>
- Mait, J. N., Euliss, G. W., & Athale, R. A. (2018). Computational imaging. *Advances in Optics and Photonics*, 10(2), 409-483. <https://doi.org/10.1364/AOP.10.000409>
- Manolakis, D. K., & Proakis, J. G. (2014). *Digital signal processing, 4th Edition*. Pearson Education.
- Ming-Fei, L., Lu, Y., Ran, Y., & Yuan-Xing, L. (2019). Fast single-pixel imaging based on optimized reordering Hadamard basis. *Acta Phys. Sin.*, 68(6), 064202. <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181886>
- NASA. (2011). Take a Tour of the Electromagnetic Spectrum. Consultado el 30 de agosto de 2021, desde [https://www.nasa.gov/audience/foreducators/tour\\_EMS.html](https://www.nasa.gov/audience/foreducators/tour_EMS.html)
- RAE. (2021). Diccionario de la lengua Española, 23.<sup>a</sup> ed. [versión 23.5 en línea]. Consultado el 19 de noviembre de 2021, desde <https://dle.rae.es/algoritmo>
- Razo, C.-M. (2011). *Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis*. Pearson Educación.

- Roman-Gonzalez, A., & Vargas-Cuentas, N. I. (2013). Análisis de imágenes hiperespectrales. *Revista Ingeniería & Desarrollo*, 9(35), 14-17. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00935014>
- Rousset, F., Ducros, N., Farina, A., Valentini, G., D'Andrea, C., & Peyrin, F. (2016). Adaptive Basis Scan by Wavelet Prediction for Single-Pixel Imaging. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 3(1), 36-46. <https://doi.org/10.1109/TCI.2016.2637079>
- Rousset, F., Ducros, N., Peyrin, F., Valentini, G., D'andrea, C., & Farina, A. (2018). Time-resolved multispectral imaging based on an adaptive single-pixel camera. *Optics Express*, 26(8), 10550-10558. <https://doi.org/10.1364/OE.26.010550>
- Salvi, J., Armangué, X., & Batlle, J. (2002). A comparative review of camera calibrating methods with accuracy evaluation. *Pattern Recognition*, 35(7), 1617-1635. [https://doi.org/10.1016/S0031-3203\(01\)00126-1](https://doi.org/10.1016/S0031-3203(01)00126-1)
- Salvi, J., Fernandez, S., Pribanic, T., & Llado, X. (2010). A state of the art in structured light patterns for surface profilometry. *Pattern Recognition*, 43(8), 2666-2680. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2010.03.004>
- Shapiro, J. H. (2008). Computational ghost imaging. *Physical Review A*, 78(6), 061802. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.061802>
- Steger, C., Ulrich, M., & Wiedemann, C. (2018). *Machine vision algorithms and applications*. John Wiley & Sons.
- Sun, M.-J., Edgar, M. P., Phillips, D. B., Gibson, G. M., & Padgett, M. J. (2016). Improving the signal-to-noise ratio of single-pixel imaging using digital microscanning. *Optics Express*, 24(10), 10476-10485. <https://doi.org/10.1364/OE.24.010476>
- Sun, M.-J., Meng, L.-T., Edgar, M. P., Padgett, M. J., & Radwell, N. (2017). A Russian Dolls ordering of the Hadamard basis for compressive single-pixel imaging. *Scientific Reports*, 7(1), 1-7. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-03725-6>
- USC-SIPI. (1981). Image Database. Consultado el 7 de septiembre de 2021, desde <https://sipi.usc.edu/database/>

- Uzal, J. M. P. (2019). *Diagnóstico por imagen en bandas no visibles sobre patrimonio cultural: Una aproximación a la imagen infrarroja, ultravioleta, fluorescencias y análisis de imagen*. BOD GmbH DE.
- Valenzuela-Ruz, V. (2003). Manual análisis de algoritmos, versión 1.0. *INACAP Área Informática y Telecomunicaciones*, 34-39.
- Wang, Z., Bovik, A. C., Sheikh, H. R., & Simoncelli, E. P. (2004). Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4), 600-612. <https://doi.org/10.1109/TIP.2003.819861>
- Watts, C. M., Shrekenhamer, D., Montoya, J., Lipworth, G., Hunt, J., Sleasman, T., Krishna, S., Smith, D. R., & Padilla, W. J. (2014). Terahertz compressive imaging with metamaterial spatial light modulators. *Nature Photonics*, 8(8), 605-609. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2014.139>
- Yu, W.-K. (2019). Super Sub-Nyquist Single-Pixel Imaging by Means of Cake-Cutting Hadamard Basis Sort. *Sensors*, 19(19), 4122. <https://doi.org/10.3390/s19194122>
- Yu, W.-K., & Liu, Y.-M. (2019). Single-Pixel Imaging with Origami Pattern Construction. *Sensors*, 19(23), 5135. <https://doi.org/10.3390/s19235135>
- Zhang, S., & Huang, P. S. (2006). Novel method for structured light system calibration. *Optical Engineering*, 45(8), 083601. <https://doi.org/10.1117/1.2336196>
- Zhang, Z., Jiao, S., Yao, M., Li, X., & Zhong, J. (2018). Secured single-pixel broadcast imaging. *Optics Express*, 26(11), 14578-14591. <https://doi.org/10.1364/OE.26.014578>
- Zhang, Z., Ma, X., & Zhong, J. (2015). Single-pixel imaging by means of Fourier spectrum acquisition. *Nature Communications*, 6(1), 1-6. <https://doi.org/10.1038/ncomms7225>
- Zhang, Z., Wang, X., Zheng, G., & Zhong, J. (2017a). Fast Fourier single-pixel imaging via binary illumination. *Scientific Reports*, 7(1), 1-9. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-12228-3>

- Zhang, Z., Wang, X., Zheng, G., & Zhong, J. (2017b). Hadamard single-pixel imaging versus Fourier single-pixel imaging. *Optics Express*, 25(16), 19619-19639. <https://doi.org/10.1364/OE.25.019619>
- Zhou, Cao, J., Cui, H., Hao, Q., Chen, B.-k., & Lin, K. (2021). Complementary Fourier single-pixel imaging. *Sensors*, 21(19), 6544. <https://doi.org/10.3390/s21196544>
- Zhou, Zhao, X., Huang, H., Wang, G., Wang, X., Song, L., & Xue, K. (2020). Multi-resolution single-pixel imaging via Hadamard 'pipeline' coding. *Applied Physics B*, 126(10), 1-10. <https://doi.org/10.1007/s00340-020-07512-6>
- Zhou-Shy. (2020). Salt and pepper noise filtering algorithm based on connectivity detection. *Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays*, 35(2), 167-172. <https://doi.org/10.3788/YJYXS20203502.0167>

# Apéndices

## Código fuente

**Código A.1:** Código fuente del algoritmo GCS+S.

```
1 function Hnew = GCSS(dim, ordering)
2 %% Construir una matriz Hadamard con una unica cadena binaria por fila
3
4
5 if rem(dim,2)~=0
6     fprintf('Incorrect dimension for Hadamard generation!\n');
7     return
8 end
9
10 dim2 = dim/2;
11
12 % crear una matriz de Hadamard u orden dim-1
13 [H1, sg1] = GCK(dim2, 1);
14
15 % temporal
16 H2 = zeros(size(H1));
17 sg2 = zeros(size(sg1));
18 Len = size(H1,1);
19
20
21
22 %% Diferente ordenacion
23
24 if strcmp(ordering, 'dyadic')
25     % ordenacion con respecto al cambio de signo
26     v = change_of_sign(H1);
27     [~,Index] = sort(v, 'ascend');
28
```

```
29     for k=1:Len
30         H2(k,:) = H1(Index(k),:);
31         sg2(k,:) = sg1(Index(k),:);
32     end
33 elseif strcmp(ordering, 'GCK')
34     H2 = H1;
35     sg2 = sg1;
36 elseif strcmp(ordering, 'random')
37     rng(1)
38     rp = rperm(Len);
39     for k=1:Len
40         H2(k,:) = H1(rp(k),:);
41         sg2(k,:) = sg1(rp(k),:);
42     end
43 elseif strcmp(ordering, 'natural')
44     H = Walsh_Hadamard_Transform(dim2);
45     Index = IndexingMatrix(H1, H, Len);
46     for k=1:Len
47         H2(k,:) = H1(Index(k),:);
48         sg2(k,:) = sg1(Index(k),:);
49     end
50 elseif strcmp(ordering, 'Walsh-Paley')
51     H = Walsh_Paley_Transform(dim2);
52     Index = IndexingMatrix(H1, H, Len);
53     for k=1:Len
54         H2(k,:) = H1(Index(k),:);
55         sg2(k,:) = sg1(Index(k),:);
56     end
57 elseif strcmp(ordering, 'Cal-Sal')
58     H = Cal_Sal_Transform(dim2);
59     Index = IndexingMatrix(H1, H, Len);
60     for k=1:Len
61         H2(k,:) = H1(Index(k),:);
62         sg2(k,:) = sg1(Index(k),:);
63     end
64 elseif strcmp(ordering, 'Walsh-System')
65     H = Walsh_System_Transform(dim2);
66     Index = IndexingMatrix(H1, H, Len);
67     for k=1:Len
68         H2(k,:) = H1(Index(k),:);
69         sg2(k,:) = sg1(Index(k),:);
70     end
71 elseif strcmp(ordering, 'other')
72     H = GCK_paths_optimalOrdering(dim2, 1.0);
73     Index = IndexingMatrix(H1, H, Len);
74     for k=1:Len
75         H2(k,:) = H1(Index(k),:);
```

```
76     sg2(k,:) = sg1(Index(k),:);
77     end
78 end
79
80
81
82 %% Representacion matricial de la matriz de Hadamard de orden dim
83
84 M = zeros(Len, Len);
85
86 for i=1:Len
87     str1 = sg2(i,:);
88     for j=1:Len
89         str2 = sg2(j,:);
90         M(i,j) = bin2dec0([str1 str2]);
91     end
92 end
93
94
95 %% Matriz Hadamard de referencia
96 [Hr, sgr] = GCK(dim, 1);
97 sgr_dec = zeros(1, size(sgr, 1));
98
99 for k=1:size(sgr, 1)
100     sgr_dec(k) = bin2dec0(sgr(k, :));
101 end
102
103
104
105
106 %% Recorrido de la matriz de Hadamard
107
108 route = zigzag(M);
109
110
111
112 %% Nueva ordenamiento
113 Hnew = zeros(size(Hr));
114
115 for k=1:size(Hnew, 1)
116     id = find(sgr_dec==route(k));
117     Hnew(k, :) = Hr(id(1), :);
118 end
```

**Código A.2:** Código que compara diferentes ordenamientos y GCS+S.

```
1 % SPI utilizando patrones Hadamard como base de deteccion
2 % Una comparacion de varias permutaciones con la ordenacion GCSS
3 clc
4 close all
5 clear
6
7 % Se carga el objeto
8 img = imread('.\misc\4.2.03.tiff');
9
10 if size(img,3)==3
11     img = rgb2gray(img);
12 end
13
14 dim = 6;
15 size_img = 2^dim;
16
17
18 % imagen submuestreada
19 % El tamaño de la imagen muestreada debe ser una potencia de 2
20 img = double(imresize(img, [size_img size_img], 'bilinear'));
21 img = img/max(max(img));
22 npixels = size(img,1);
23
24 fprintf('Size of image: %d pixels\n',npixels)
25
26 % - - - - -
27 %   Generacion de patrones de medicion
28 % - - - - -
29
30 if 2^(2*dim) ~= npixels^2
31     fprintf('Dimensions do not agree.\n');
32     return
33 end
34
35 % - - - - -
36 % Construccion de las matrices de Hadamard
37 % - - - - -
38
39 fprintf('Constructing Hadamard matrices.\n')
40
41 H1 = GCSS(2*dim, 'Cal-Sal');
42 H2 = GCSS(2*dim, 'natural');
43 H3 = GCSS(2*dim, 'random');
44 H4 = GCSS(2*dim, 'Walsh-Paley');
```

```
45 H5 = GCSS(2*dim, 'dyadic');
46
47
48 % - - - - -
49 % Programa principal de la simulacion
50 % - - - - -
51
52 snr = 40;
53 option_sampling = 1;
54 list_rmse = zeros(10,5);
55 list_rmse_noise = zeros(10,5);
56 list_images = {};
57 iter = 1;
58
59 % almacenamiento de imagenes
60 img_nonoise = zeros(size_img, size_img, 10, 5);
61 img_noise = zeros(size_img, size_img, 10, 5);
62
63 fprintf('Simulation ...\n');
64
65 for sampling_ratio=0.1:0.1:1
66     fprintf('Sampling ratio: %.2f\n',sampling_ratio*100);
67
68     % ordenamiento Cal-Sal
69     [target, target_noise] = dspidifferential(H1, img, snr, dim, option_sampling,
70     ↔ sampling_ratio);
71     list_rmse(iter,1) = rmse(img, target);
72     list_rmse_noise(iter,1) = rmse(img, target_noise);
73     img_nonoise(:,:,iter, 1) = target;
74     img_noise(:,:,iter, 1) = target_noise;
75
76     % ordenamiento Natural
77     [target, target_noise] = dspidifferential(H2, img, snr, dim, option_sampling,
78     ↔ sampling_ratio);
79     list_rmse(iter,2) = rmse(img, target);
80     list_rmse_noise(iter,2) = rmse(img, target_noise);
81     img_nonoise(:,:,iter, 2) = target;
82     img_noise(:,:,iter, 2) = target_noise;
83
84     % ordenamiento Random
85     [target, target_noise] = dspidifferential(H3, img, snr, dim, option_sampling,
86     ↔ sampling_ratio);
87     list_rmse(iter,3) = rmse(img, target);
88     list_rmse_noise(iter,3) = rmse(img, target_noise);
89     img_nonoise(:,:,iter, 3) = target;
90     img_noise(:,:,iter, 3) = target_noise;
```

```
89     % ordenamiento Walsh Paley
90     [target, target_noise] = dspidifferential(H4, img, snr, dim, option_sampling,
    ↪ sampling_ratio);
91     list_rmse(iter,4) = rmse(img, target);
92     list_rmse_noise(iter,4) = rmse(img, target_noise);
93     img_nonoise(:,:,iter, 4) = target;
94     img_noise(:,:,iter, 4) = target_noise;
95
96     % ordenamiento Dyadic
97     [target, target_noise] = dspidifferential(H5, img, snr, dim, option_sampling,
    ↪ sampling_ratio);
98     list_rmse(iter,5) = rmse(img, target);
99     list_rmse_noise(iter,5) = rmse(img, target_noise);
100    img_nonoise(:,:,iter, 5) = target;
101    img_noise(:,:,iter, 5) = target_noise;
102
103    iter = iter + 1;
104 end
105
106
107 % plot RMSE para varias matrices de Hadamard con una relacion de muestreo
108 range = (0.1:0.1:1)*100;
109
110 figure(1)
111 hold on, plot(range, list_rmse(:,1),'d-','LineWidth',1)
112 hold on, plot(range, list_rmse(:,2),'o--','LineWidth',1)
113 hold on, plot(range, list_rmse(:,3),'v-.','LineWidth',1)
114 hold on, plot(range, list_rmse(:,4),'*:', 'LineWidth',1)
115 hold on, plot(range, list_rmse(:,5),'p-', 'LineWidth',1)
116
117
118 legend('Cal-Sal', 'Natural', 'Random', 'Walsh-Paley', 'Sequency (GCS+S)')
119 xlabel('Sampling ratio (%)');
120 ylabel('RMSE')
121 axis tight
122 grid
123 box on
124
125
126 figure(2)
127 hold on, plot(range, list_rmse_noise(:,1),'d-r')
128 hold on, plot(range, list_rmse_noise(:,2),'o--b')
129 hold on, plot(range, list_rmse_noise(:,3),'v-.k')
130 hold on, plot(range, list_rmse_noise(:,4),'*:k')
131 hold on, plot(range, list_rmse_noise(:,5),'p-k')
132 legend('Cal-Sal', 'Natural', 'Random', 'Walsh-Paley', 'Sequency (GCS+S)')
133 xlabel('Sampling ratio (%)');
```

```
134 ylabel('RMSE')
135 title('Signal corrupted by noise')
136 axis tight
137 grid
138 box on
139
140 % -----
141 % Plot imagenes reconstruidas
142 % -----
143
144 figure(4)
145 title('Reconstructed images')
146 index = 1;
147 for j=1:10
148     for k=1:5
149         subplot(10,5,index)
150         imshow(img_nonoise(:,:,j,k), [], 'InitialMagnification',500)
151         set(gca, 'xtick', [], 'ytick', [])
152         index = index + 1;
153     end
154 end
155
```

---

## Productos de investigación

1. **Presentación de un póster** titulado: *Una técnica eficiente para formar imágenes a partir de un solo píxel basada en la transformada de Hadamard*, en el 9° Coloquio de investigación en Ciencia y Tecnología “La mujer que transforma: su importancia e impacto en el desarrollo científico y tecnológico”, Atizapán de Zaragoza, Estado de México el 30 de junio de **2020**. Ver apéndice B.1.
2. **Reconocimiento al mejor póster**: en el 9° Coloquio de investigación en Ciencia y Tecnología “La mujer que transforma: su importancia e impacto en el desarrollo científico y tecnológico” Atizapán de Zaragoza, Estado de México el 2 de julio de **2020**. Ver apéndice B.2.
3. **Ponencia magistral** titulada: *Formación de imágenes a partir de un solo píxel y sus aplicaciones*, en el II International Symposium on Information and Knowledge Technologies and their Applications, Atizapán de Zaragoza, Estado de México el 26 de octubre de **2021**. Ver apéndice B.3.
4. **Artículo publicado** titulado: *Efficient ordering of the Hadamard basis for single pixel imaging*, en la revista Optics Express (revista indexada en el Q2 del JCR), el 11 de abril de **2022**, <https://doi.org/10.1364/OE.451656>. Ver apéndice B.4.

5. **Artículo publicado** titulado: *Reconstrucción de objetos e imágenes con un solo píxel*, en la revista UNIVERSITARIA (revista de divulgación), el 1 de julio de **2022**. <https://revistauniversitaria.uaemex.mx/article/view/19044>. Ver apéndice B.5.
  
6. **Artículo publicado** titulado: *Simultaneous intensity projection for projector response computation with application to an active radiometric calibration*, en la revista Optica Applicata (revista indexada en el Q4 del JCR), en diciembre de **2022**. <https://doi.org/10.37190/oa220404>. Ver apéndice B.6.

**Figura B.1:**  
*Constancia de presentación de póster.*



Título: Una técnica eficiente para formar imágenes a partir de un solo píxel basada en la transformada de Hadamard.

**Figura B.2:**  
*Reconocimiento al mejor póster:*



En: el 9º Coloquio de investigación en Ciencia y Tecnología "La mujer que transforma: su importancia e impacto en el desarrollo científico y tecnológico".

**Figura B.3:**  
*Constancia por presentar la Ponencia Magistral.*



Se otorga la presente

# Constancia

A: DRA. EN C. MARÍA DE LOURDES LÓPEZ GARCÍA,  
MTRO. EN C. COM. PEDRO DAVID FILIO AGUILAR

Por la presentación de la ponencia Magistral:

**FORMACIÓN DE IMÁGENES A PARTIR DE UN SÓLO PIXEL Y SUS  
APLICACIONES**

**II International Symposium on Information and Knowledge  
Technologies and their Applications**

Atizapán de Zaragoza, Estado de México a 26 de octubre del 2021

ATENTAMENTE

Patria, Ciencia y Trabajo

*“2021, Celebración de los 65 Años de la Universidad Autónoma del Estado de México”*



**DR. EN C. C. VÍCTOR MANUEL LANDASSURI MORENO**  
DIRECTOR

Centro Universitario  
CUAEM Valle de México  
DIRECCIÓN  
2017-2021



Título: Formación de imágenes a partir de un solo píxel y sus aplicaciones.

**Figura B.4:**

Caratula del artículo publicado.



## Efficient ordering of the Hadamard basis for single pixel imaging

LOURDES LÓPEZ-GARCÍA,<sup>1,\*</sup> WILLIAM CRUZ-SANTOS,<sup>2</sup> ANMI GARCÍA-ARELLANO,<sup>3</sup> PEDRO FILIO-AGUILAR,<sup>1</sup>  JOSÉ A. CISNEROS-MARTÍNEZ,<sup>4</sup> AND RUBÉN RAMOS-GARCÍA<sup>4</sup>

<sup>1</sup>CU-UAEM Valle de Chalco, Hermenegildo Galeana 3, Valle de Chalco, Estado de México 56615, Mexico

<sup>2</sup>Helios Imaging Systems S.C., Estado de México, Mexico

<sup>3</sup>Universidad Politécnica de Bacalar, Avenida 39, Bacalar, Q. Roo 77930, Mexico

<sup>4</sup>Coordinación de Óptica, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Puebla 72840, Mexico

\*mllopezg@uaemex.mx

**Abstract:** Single-pixel imaging is a technique that can reconstruct an image of a scene by projecting a series of spatial patterns on an object and capturing the reflected light by a single photodetector. Since the introduction of the compressed sensing method, it has been possible to use random spatial patterns and reduce its number below the Nyquist-Shannon limit to form a good quality image but with lower spatial resolution. On the other hand, Hadamard pattern based methods can reconstruct large images by increasing the acquisition measurement time. Here, we propose an efficient strategy to order the Hadamard basis patterns from higher to lower relevance, and then to reconstruct an image at very low sampling rates of at least 8%. Our proposal is based on the construction of generalized basis vectors in two dimensions and then ordering in zigzag fashion. Simulation and experimental results show that the sampling rate, image quality and computational complexity of our method are competitive to the state of the art methods.

© 2022 Optica Publishing Group under the terms of the [Optica Open Access Publishing Agreement](#)

### 1. Introduction

Imaging is commonly performed using 2D array of sensors such as digital cameras at the visible spectral region. In contrast, single-pixel imaging (SPI) uses only a single detector to retrieve an image of a scene [1,2]. The SPI technique can reconstruct an image by projecting spatially modulated patterns while measuring the correlated intensities using a photodetector. Among the various applications of SPI are the implementation of low-cost imaging systems at non-visible wavelengths, multispectral [3,4], hyperspectral imaging with applications to biomedical imaging [5], the reconstruction of three-dimensional video at a frame rate of 12 Hz [6], the development of secure imaging systems, and visual cryptography schemes for QR-codes [7,8].

SPI is related to the ghost imaging technique that reconstructs an image using the information of two correlated coherent beams that are sensed by a camera and a photodetector [9]. This technique has also been implemented using entangled photons where one of the photons interacts with the object and a photodetector, while the second one is sensed by a camera [10]. On the other hand, the fundamental theory of compressive sampling (CS) allows the development of single-pixel cameras that take advantage of the sparsity of the target and the interaction of random patterns with the scene [11,12]. CS belongs to the class of computational imaging methods where the image is reconstructed through an optimization process. In particular, in CS, an undetermined system of linear equations is solved by imposing the restriction of sparsity, that is, signals with relatively few terms. This sparsity/compression criterion allows an image to be reconstructed with a series of measurements below the Nyquist-Shannon sampling limit [13]. Recently, the sampling basis method proposed uses an orthogonal basis pattern to obtain the measurements, for example, an orthogonal basis formed with Hadamard matrices [14], Fourier [15,16] and wavelets

#451656

Journal © 2022

Received 19 Dec 2021; revised 9 Mar 2022; accepted 25 Mar 2022; published 8 Apr 2022

<https://doi.org/10.1364/OE.451656>

Disponibile en: <https://doi.org/10.1364/OE.451656>.

**Figura B.5:**  
Caratula del artículo de divulgación publicado.



Tecnología

# Reconstrucción de objetos e imágenes con un solo pixel

Reconstruction of objects and images with a single pixel

Por Pedro David Filio Aguilar y María de Lourdes López García

**Resumen:** Single-pixel imaging (SPI) es una técnica experimental que ocupa un solo pixel detector para obtener la forma de un objeto sin tocarlo, a diferencia de las cámaras profesionales que utilizan millones de pixeles. Con esta técnica se pueden apreciar imágenes fuera del espectro de visión humana, como las infrarrojas y las ultravioleta, logrando que muchas áreas se beneficien de su implementación, como la industria y el diagnóstico médico. Por tanto, el estudio de SPI se ha convertido en un tema de interés para la comunidad investigadora de las áreas de óptica y visión artificial.

**Palabras clave:** single-pixel imaging, detector de un solo pixel, patrones de Hadamard, reconstrucción de objetos.

**Abstract:** Single-pixel imaging (SPI) is an experimental technique that uses a single detector pixel to obtain the shape of an object without touching it, unlike professional cameras that use millions of pixels. With this technique, images outside the spectrum of human vision, such as infrared and ultraviolet, can be perceived, benefiting many areas benefit from its implementation, such as industry and medical diagnostics. Therefore, the study of SPI has become a topic of interest for the research community in the areas of optics and machine vision.

**Keywords:** single-pixel imaging, single-pixel detector, Hadamard patterns, object reconstruction.

Recibido: 06/10/21 • Aprobado: 10/06/22

**En el campo** de la visión artificial o visión por computadora, existen muchas áreas que pueden beneficiarse de la reconstrucción de un objeto sin manipularlo físicamente, como la inspección industrial de piezas fabricadas, la resonancia magnética y el diagnóstico médico en general o la detección de objetos en campo de batalla, entre otros.

Los investigadores constantemente desarrollan diferentes técnicas de no contacto para reconstruir objetos; sin embargo, en ocasiones, estas se ven limitadas, pues cada vez más se necesita procesar mayor cantidad de información, con más velocidad e inclusive en tiempo real.

Un ejemplo de estas técnicas es la reconstrucción de objetos con luz estructurada, considerada una de las más confiables para recuperar superficies de objetos sin tocarlos; al respecto, Salvi (2010) señala que con ellas es posible recuperar la forma real en el espacio y con alta precisión.

Entre las técnicas de reconstrucción de objetos con luz estructurada encuentra un paradigma emergente llamado SPI (del inglés *single-pixel imaging*), imagen de un solo pixel. Es una tecnología que produce imágenes al escanear un objeto o escena con una serie de patrones definidos por el usuario; está equipada con un detector de pixel único y un proyector que permite obtener imágenes de alta calidad en comparación con las cámaras profesionales que ocupan una serie de millones de pixeles para capturar imágenes (Gibson, Johnson y Padgett, 2020).

## ¿CÓMO FUNCIONA?

Según Gibson (2020), un sistema SPI se compone por un dispositivo de espejo digital (DMD, por sus siglas en inglés), que consiste en una serie de microespejos accionados electrostáticamente con dos estados estables +24° y -24° desde la horizontal y que corresponden a los estados encendido y apagado, respectivamente, una lente, un detector

**Figura B.6:**  
*Caratula del artículo publicado.*

*Optica Applicata, Vol. LII, No. 4, 2022*  
DOI: 10.37190/oa220404

## **Simultaneous intensity projection for projector response computation with application to an active radiometric calibration**

PEDRO-DAVID FILIO-AGUILAR, LOURDES LÓPEZ-GARCÍA\*,  
JUVENAL RUEDA-PAZ, MANUEL ÁVILA-AOKI

CU-UAEM Valle de Chalco, Hermenegildo Galeana 3, Valle de Chalco,  
Estado de México 56615, México

\*Corresponding author: mllopezg@uaemex.mx

One of the most important sources of errors in digital fringe projection (DFP) systems is the nonlinearity in the response of the projector when it uses the three-step phase retrieval algorithm. Thus, it is necessary to increase the accuracy without affecting the efficiency. In this sense, the radiometric rectification methods are used. In this paper, an active radiometric rectification method for digital fringe projection is proposed. This proposal consists in two improvements of traditional active techniques: first, parallel intensity projection is used to obtain the projector response which requires only four dot patterns; and second, a method is provided for the calculation of the inverse polynomial that guarantees symmetry with respect to the response of the projector. Experimental results, in a digital fringe projection system, show that the root-mean-square phase error improves 6.3 times using this proposal.

Keywords: camera-projector compensation, digital fringe projection, phase retrieval, 3D imaging.

### **1. Introduction**

The digital fringe projection (DFP) techniques have been widely used in areas such as entertainment, reverse engineering, and quality control, among others [1]. Commonly, this technique is based on the projection of sinusoidal fringe patterns using a digital projector and recorded with a digital camera. In this sense, the DFP techniques are affected by the nonlinearity of the input-to-output intensities of the projector whose goal is to enhance visual effects.

Several compensation methods have been proposed to eliminate such nonlinearity that can be grouped into two categories: active and passive methods. In the former, the sinusoidal fringe patterns are modified before their projection in such a way that the nonlinearity of the projector is cancelled [2]. In passive methods, the recorded fringe patterns are analyzed after their projection [3–8]. Active methods are faster than passive methods; they do not require any post-processing [9], however, it is assumed that the input-to-output response of the projector is previously known.